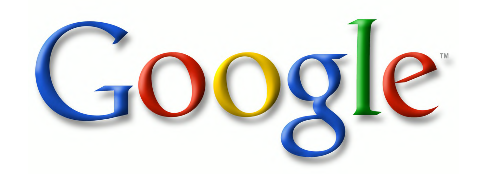






ELEMENTE

DER

THEORIE DER FUNCTIONEN

EINER

COMPLEXEN VERÄNDERLICHEN GRÖSSE.

MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER SCHÖPFUNGEN RIEMANNS

BEARBEITET VON

DR. H. DURÈGE,

ORDENTL. PROFESSOR AM POLYTECHNICUM ZU PRAG.





LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1864.


BIBLIOTHECA·BODLEIANA
DOMINUS ILLUMINATIO MEA

VORWORT.

Seit der Einführung der complexen Variablen in die Functionenlehre und namentlich seit den grossen Schöpfungen *Riemann's* scheint sich ein Umschwung in der Mathematik vorzubereiten, der zwar zunächst die reine Mathematik berührt, aber wohl auch in nicht ferner Zeit, auf die physikalischen Wissenschaften und die angewandte Mathematik überhaupt von Einfluss sein wird. Daher schien es mir im höchsten Grade wünschenswerth zu sein, dass diese Lehren so bald als möglich eine zusammenhängende Darstellung finden möchten. Indem ich nun eine Bearbeitung wenigstens der Elemente dieser Theorie unternahm, verhehlte ich mir keineswegs die grossen Schwierigkeiten, welche mit einem solchen Unternehmen verbunden sind; aber bei der Wichtigkeit der Sache, und weil hier wohl entschieden ein Bedürfniss vorlag, glaubte ich, dass Zögern nicht am Platze sei, und knüpfte zugleich an die Herausgabe dieses Buches die Hoffnung, dass sich durch diesen ersten Versuch Andere angeregt fühlen möchten, dieser Aufgabe ihre Kräfte zuzuwenden.

Bei der Ausarbeitung habe ich ausser den gedruckten Abhandlungen *Riemann's*, nämlich der Inaugural-Disserta-

tion: „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse.“ (Göttingen 1851) und den im 54sten Bande des *Crelle*'schen Journals enthaltenen Abhandlungen auch noch zwei Nachschriften nach Vorlesungen *Riemann's* benutzen können. Zwar bestanden die letzteren nur in mehr oder weniger zusammenhängenden Notizen, welche während der Vorlesung selbst niedergeschrieben worden waren, sodass sie natürlich mancherlei Lücken enthielten und nur mit Anwendung einer sorgfältigen Kritik benutzt werden konnten; durch ausserordentlich schätzbare Andeutungen und Fingerzeige haben sie mir aber die wesentlichsten Dienste geleistet, und ich bin meinen beiden Freunden, welche die Güte hatten, sie mir zum Gebrauche zu überlassen, dadurch zu grossem Danke verpflichtet worden. Ausserdem ist auch die Inaugural-Dissertation von *Prym:* *„Theoria nova functionum ultraellipticarum.“* (*Berlin* 1863) und die in *Schlömilch's* Zeitschrift für Mathematik und Physik Jahrg. 8 (1863) enthaltene Abhandlung von *Roch:* „Ueber Functionen complexer Grössen“ benutzt worden. Da mit Ausnahme der Vorarbeiten von *Cauchy* und *Puiseux* fast alles in der vorliegenden Schrift Dargestellte von *Riemann* herrührt, so habe ich es für überflüssig gehalten, jedesmal die betreffenden Stellen anzuführen, in der Meinung, dass man dieselben bei dem äusserlich so geringen Umfange der *Riemann*'schen Schriften mit leichter Mühe aufzufinden im Stande sein wird.

In Beziehung auf die Anordnung des Stoffes glaube ich wegen zweier Stellen etwas bemerken zu müssen. Die erste bildet den § 21. Man bedarf zur Entwickelung der allgemeinen Eigenschaften der Functionen eigentlich nur des Satzes, dass wenn eine Function $\varphi(z)$ in einem Puncte a so unendlich wird, dass $(z-a)\,\varphi(z)$ sich einem endlichen Grenzwerthe p nähert, das um diesen Punct genom-

mene Integral $\int \varphi(z)\, dz = 2\pi i p$ ist. Da es mir aber schien, dass es für den Leser von Interesse sein müsste, gleich hier zu erfahren, was sich über das erwähnte Integral sagen lässt, wenn es um einen Verzweigungspunct genommen wird, so habe ich, obgleich die vollständige Bestimmung der Werthe von Integralen, welche sich auf geschlossene Linien erstrecken, erst viel später erledigt werden kann, doch jene Betrachtung gleich im § 21 angeschlossen. Die zweite Bemerkung bezieht sich auf Abschnitt V. In diesem ist der Logarithmus und die Exponentialfunction behandelt. Nun war es allerdings nothwendig, an dieser Stelle etwas über den Logarithmus zu sagen, weil später von dessen Eigenschaften Gebrauch gemacht wird, indessen hätte dies ziemlich kurz abgemacht werden können. Es schien mir aber zweckmässiger, diesen Abschnitt etwas vollständiger zu behandeln, obgleich dadurch den Betrachtungen über Querschnitte und Periodicitätsmoduln vorgegriffen wird, einmal, weil dadurch die Natur jener beiden Functionen in ein viel helleres Licht tritt, und dann, weil diese specielle Untersuchung gerade geeignet erscheint, für jene späteren Betrachtungen die Vorstellungen zu fixiren. Man wird es ferner, wie ich hoffe, billigen, dass ich in einem Buche dieser Art nicht die volle Allgemeinheit habe walten lassen, wie sie bei *Riemann* herrscht. So ist z. B. nirgend von den hebbaren Unstetigkeiten die Rede, und auch im Abschnitt XI habe ich mich nur auf die Fälle beschränkt, in denen der reelle Theil einer Function entweder längs der Begrenzung einer Fläche constant ist, oder sich stetig längs derselben ändert. Ich meine, dass solche Beschränkungen für das Verständniss nur fördernd sein können.

Es bleibt mir nur übrig, das Buch der wohlwollenden Nachsicht der Kenner zu empfehlen und den Wunsch aus-

zusprechen, es möchte dasselbe der Lehre von den Functionen complexer Variablen einige Freunde gewinnen. Sollte dies gelingen, so würde ich glauben dürfen, dass meine Arbeit nicht ganz überflüssig war.

Prag, den 10. October 1864.

H. Durège.

Inhalt.

Abschnitt IV.

Integrale mit complexen Variabelen.

Seite

Abschnitt V.

Der Logarithmus und die Exponentialfunction.

Abschnitt VI.

Allgemeine Eigenschaften der Functionen.

Abschnitt VII.

Ueber das unendlich gross und unendlich klein Werden der Functionen.

A. Functionen ohne Verzweigungspuncte. Einwerthige Functionen.

B. Functionen mit Verzweigungspuncten.

Abschnitt VIII.

Integrale.

A. Integrale über geschlossene Linien ausgedehnt.

B. Integrale über nicht geschlossene Linien. Unbestimmte Integralfunctionen.

Abschnitt IX.

Einfach und mehrfach zusammenhängende Flächen.

Abschnitt X.

Von den Periodicitätsmoduln.

Abschnitt XI.

Bestimmung einer Function durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen.

Abschnitt XII.

Ueber die Bestimmung des Zusammenhangs einer gegebenen Fläche.

Einleitung.

Die Verfolgung der allmäligen Entwickelung der Lehre von den imaginären Grössen bietet besonders deswegen ein grosses Interesse dar, weil man hier noch deutlich erkennen kann, mit welchen Schwierigkeiten die Einführung neuer, vorher nicht bekannter, oder wenigstens nicht hinreichend geläufiger Begriffe verbunden ist. Die Zeiten, in welchen die negativen, gebrochenen und irrationalen Grössen in die Mathematik eingeführt wurden, liegen uns so ferne, dass wir uns von den Schwierigkeiten, welche auch die Einführung dieser Begriffe früher gehabt haben mag, keine rechte Vorstellung mehr machen können. Ausserdem ist die Erkenntniss des Wesens der imaginären Grössen auch wieder rückwärts für die Erkenntniss der negativen, gebrochenen und irrationalen Grössen lehrreich geworden, da ein gemeinsames Band alle diese Grössen umschlingt.

Bei den älteren Mathematikern herrschte fast durchgängig die Ansicht, dass die imaginären Grössen unmöglich seien. Man begegnet beim Durchblättern älterer mathematischer Schriften immer wieder dem Ausspruche, dass das Auftreten imaginärer Grössen keine andre Bedeutung habe, als die, die Unmöglichkeit oder Unlösbarkeit einer Aufgabe darzuthun, dass diese Grössen keinen Sinn hätten, dass man sich ihrer aber bisweilen mit Nutzen bedienen könne, obgleich die Form der Resultate dann nur eine symbolische sei. In dieser Beziehung ist es interessant, den Entwickelungsgang *Cauchy's* zu beobachten. Dieser grosse Mathematiker ist neben unserem „*Princeps mathematicorum*“ *Gauss*, welcher zuerst und wohl schon sehr frühe die hohe Bedeutung der imaginären Grössen für alle Theile der Mathematik

erkannte, als Schöpfer der Lehre von den Functionen imaginärer Variabeln zu betrachten. Gleichwohl schloss er sich sowohl in seiner „algebraischen Analysis", als auch in den „Exercices" vom Jahre 1844 noch ganz der Ansicht der älteren Mathematiker an. Es heisst dort an einer Stelle*): „Toute équation imaginaire n'est autre chose que la répresentation symbolique de deux équations entre quantités réelles. L'emploi des expressions imaginaires, en permettant de remplacer deux équations par une seule, offre souvent le moyen de simplifier les calculs et d'écrire sous une forme abrégée des résultats fort compliqués. Tel est même le motif principal pour lequel on doit continuer à se servir de ces expressions, qui prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, ne signifient rien et n'ont pas de sens. Le signe $\sqrt{-1}$ n'est en quelque sorte qu'un outil, un instrument de calcul, qui peut être employé avec succès dans un grand nombre de cas pour rendre beaucoup plus simples non-seulement les formules analytiques, mais encore les méthodes à l'aide desquelles on parvient à les établir."

Die imaginären Grössen wurden von den italienischen Algebraikern des 16ten Jahrhunderts in die Mathematik eingeführt, und sind wahrscheinlich zuerst von *Cardano***) erwähnt worden, der sie aber verwirft, weil sie weder positiv noch negativ, und daher von keinem Nutzen seien. *Albert Girard****) nennt sie *quantités enveloppées*. Der Name unmögliche, eingebildete oder imaginäre Grössen findet sich zuerst in der im Jahre 1673 gedruckten Algebra von *Wallis*.

Bei diesen älteren Mathematikern und noch viel später blieb nun, wie bemerkt, die Ansicht herrschend, dass die imaginären Grössen in der That unmöglich seien, dass ihnen wirklich keine Existenz zuzuschreiben sei, und dass ihr Auftreten bei der versuchten Lösung einer Aufgabe lediglich die Unmöglichkeit der Lösung manifestire. Sie wurden fast nur in einer der mathematischen Disciplinen unbeschränkt mit berücksichtigt, nämlich in der Lehre von

---

*) *Cauchy*, Exercices d'analyse et de physique mathématique. Tome III. p. 361.

**) Artis magnae sive de regulis Algebrae liber unus. 1545.

***) Invention nouvelle en Algèbre. 1629.

den algebraischen Gleichungen; hier war es viel zu wichtig, zugleich auf alle Wurzeln Rücksicht zu nehmen, als dass das Imaginärwerden der letzteren den Untersuchungen hätte Stillstand gebieten können. Einzelne Männer, die, wie es scheint, sich mit einer gewissen Vorliebe den imaginären Grössen zuwandten, wie *de Moivre, Johann Bernoulli,* die beiden *Fagnano, d'Alembert, Euler* fanden allmälig die diesen Grössen innewohnenden ausgezeichneten Eigenschaften auf und bildeten ihre Lehre immer mehr und mehr aus. Doch wurden diese Untersuchungen im Ganzen mehr für wissenschaftliche Spielereien, für blosse Curiosa angesehen, und man legte ihnen nur in so fern Werth bei, als sie nützliche Hülfsmittel für andere Untersuchungen darboten. Es hat aber auch nicht an solchen gefehlt, welche die imaginären Grössen wegen ihrer vermeintlichen Unmöglichkeit nirgend angewendet wissen wollten.*)

Die Ansicht von der Unmöglichkeit der imaginären Grössen ist eigentlich von einem Verkennen des Wesens der negativen, gebrochenen und irrationalen Grössen ausgegangen. Da nämlich die Anwendung dieser mathematischen Begriffe auf Geometrie, Mechanik, Physik und zum Theil selbst im bürgerlichen Leben sich so leicht und so von selbst darbot, ja ohne Zweifel in vielen Fällen die Veranlassung zur Untersuchung dieser Grössen wurde, so kam es, dass man in irgend einer dieser Anwendungen das wahre Wesen dieser Begriffe und ihre wahre Stellung im Gebiete der Mathematik zu finden glaubte. Bei den imaginären Grössen lag nun eine solche Anwendung nicht so nahe, und wegen der mangelnden Kenntniss derselben glaubte man die imaginären Grössen in das Reich der Unmöglichkeit verweisen, ihre Existenz bezweifeln zu müssen. Dabei liess man aber ausser Acht, dass die reine Mathematik, die Wissenschaft der Addition, so wichtig auch ihre Anwendungen sind, doch an und für sich mit den letzteren nichts zu thun hat, dass ihre durch eine vollständige und widerspruchsfreie Definition eingeführten Begriffe in der Defini-

*) Aussi a-t-on vu quelques géomètres d'un rang distingué ne point goûter ce genre de calcul, non qu'ils doutassent de la justesse de son résultat, mais parce qu'il paraissait y avoir une sorte d'inconvenance à employer des expressions de ce genre qui n'ont jamais servi qu'à annoncer une absurdité dans l'énoncé d'un problème. *Montucla*, Histoire des mathématiques. Tome III. p. 283.

tion selber ihre Existenz begründen, und dass ihre Sätze wahr sind, gleich viel, ob man von ihnen eine Anwendung machen kann oder nicht. Ob und wann dieser oder jener Satz eine Anwendung finden wird, lässt sich oft nicht vorherbestimmen, und gerade die heutige Zeit ist ja reich genug an Beispielen, dass sich die wichtigsten, selbst tief in das Leben der Völker eingreifenden Anwendungen an Sätze geknüpft haben, dei deren Entdeckung man sicherlich keine Ahnung von diesen Folgen hatte. So stark war aber allmälig der Glaube an die Unmöglichkeit der imaginären Grössen geworden, dass als seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts die Idee auftauchte, die imaginären Grössen geometrisch darzustellen*), man nun umgekehrt aus der vermeintlichen Unmöglichkeit derselben auch die Unmöglichkeit, sie geometrisch darzustellen, folgerte.**)

Um die Stellung, welche die imaginären Grössen im Gebiete der reinen Mathematik einnehmen, zu erkennen, und um einzusehen, dass sie mit den negativen, gebrochenen und irrationalen Grössen durchaus auf eine Linie zu stellen sind, müssen wir etwas zurückgreifen.

Die ersten mathematischen Begriffe, die sich unmittelbar aus der Grundoperation der Mathematik, der Addition, ergeben, sind diejenigen, die man nach dem heutigen Sprachgebrauche positive ganze Zahlen nennt. Geht man von der Addition zu ihrer Umkehrung, der Subtraction, über, so stellt sich alsbald die Nothwen-

---

*) Der erste Versuch, die imaginären Grössen geometrisch darzustellen, wurde von *Kühn* im Jahre 1750 gemacht. (Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis. Novi commentarii Acad. Petrop. III ad 1750 et 1751). Obgleich *Montucla* (Histoire des Mathématiques. Tome III. p. 30) meint, es sei nicht der Mühe werth, diese Abhandlung zu lesen, so ist neben manchem Unrichtigen doch die Idee darin schon ausgesprochen, dass man unter $a\sqrt{-1}$ eine Gerade zu verstehen habe, welche auf der Geraden a senkrecht steht und mit ihr gleiche Länge hat. Uebrigens scheint *Kühn* ein sonderbarer Kauz gewesen zu sein. Wenigstens theilt *Montucla* (a. a. O.) einige höchst eigenthümliche Ansichten desselben mit. Wenn aber Jemand in der damaligen Zeit auf die Idee kommen konnte, die für unmöglich gehaltenen imaginären Grössen geometrisch darstellen zu wollen, so wäre es nicht zu verwundern, wenn er ein Mann war, der am Sonderbaren Geschmack fand.

**) *Foncenex*, Reflexions sur les quantités imaginaires. Miscellanea Taurinensia. Tom. I. p. 122.

digkeit ein, neue mathematische Begriffe einzuführen. Sobald nämlich die Aufgabe entsteht, eine grössere Zahl von einer kleineren zu subtrahiren, so kann dieselbe nicht mehr durch eine positive ganze Zahl gelöst werden. Auf einem Standpunkte, auf dem man nur positive ganze Zahlen kennt, hat man daher die Alternative, entweder eine solche Aufgabe als unmöglich, als unlösbar zu bezeichnen, und damit dem Fortschritt der Wissenschaft nach dieser Richtung hin eine Schranke zu setzen, oder aber die Möglichkeit der Auflösung jener Aufgaben dadurch herbeizuführen, dass man solche mathematischen Begriffe, welche die Aufgabe zu lösen vermögen, als neue Begriffe einführt. Auf diese Weise entstehen durch die Subtraction die negativen Grössen als Differenzen zunächst zweier positiver ganzer Zahlen, von denen der Subtrahendus grösser ist, als der Minuendus. Ihre Existenz und Bedeutung für die reine Mathematik ist dann nicht etwa in einem Gegensatze zwischen Rechts und Links, Vorwärts und Rückwärts, Bejahung und Verneinung, Vermögen und Schulden oder in irgend einer ihrer mannigfaltigen Anwendungen begründet, sondern lediglich in der Definition, durch welche sie eingeführt werden.

Wenngleich nun aber in rein begrifflicher Beziehung in den negativen Grössen nichts Unmögliches liegt, so kann es sich doch ereignen, dass durch das Auftreten von negativen Grössen die Unmöglichkeit oder Unlösbarkeit einer Aufgabe angezeigt wird, nämlich dann, wenn die Natur der Aufgabe zu ihrer Lösung nothwendig positive Grössen erfordert. Ist z. B. folgende Aufgabe gestellt: Man soll 6 Kugeln so in zwei Urnen vertheilen, dass sich in der einen 8 mehr befinden, als in der andern, so ist darin folgende rein mathematische Aufgabe enthalten: zwei Zahlen zu finden, deren Summe gleich 6 und deren Differenz gleich 8 sei. Wird nun nur verlangt, dass diese Zahlen mathematische Begriffe seien, ohne dieselben auf eine besondere Art von mathematischen Begriffen zu beschränken, und sind ferner vorher die negativen Grössen durch ihre Definition begrifflich festgestellt worden, so liegt die Lösbarkeit der rein mathematischen Aufgabe auf der Hand; wie Jeder sieht, sind die positive Zahl 7 und die negative Zahl -1 diejenigen Grössen, welche der Aufgabe genügen. Nichts desto weniger ist die ursprünglich gestellte Aufgabe zu lösen unmöglich, denn in derselben wird verlangt, dass jede der gesuchten Zahlen eine Anzahl bedeuten soll, also nothwendig posi-

tiv sein muss. Läge nun die Unmöglichkeit nicht so offen da, wie bei diesem einfachen Beispiele, so würde das Auftreten der negativen Zahl — 1 die Unlösbarkeit der Aufgabe zu Tage bringen.

Ganz dieselben Umstände treten nun bei jeder andern indirecten Operation auf's Neue ein. Die nächste indirecte Operation ist die Division. Stellt man die Aufgabe, eine ganze Zahl in eine andere zu dividiren, welche nicht ein Vielfaches der ersteren ist, so entsteht die Unmöglichkeit, diese Aufgabe durch positive oder negative ganze Zahlen zu lösen. Der Fortschritt der Wissenschaft erfordert also wieder, die Möglichkeit der Lösung dadurch herbeizuführen, dass man die dazu nöthigen Grössen einführt und begrifflich feststellt. Diese neuen Begriffe sind hier die rationalen Brüche. Aber auch hier kann der Fall eintreten, dass das Auftreten derselben die Unmöglichkeit der Lösung einer Aufgabe kundgiebt, nämlich wiederum dann, wenn die Natur der Aufgabe die Lösung durch die neuen Begriffe nicht gestattet. Als ein Beispiel diene folgende Aufgabe: Durch ein in einer Maschine oder einem Uhrwerke befindliches Rad, welches 100 Zähne besitzt und in der Minute einmal umläuft, soll unmittelbar ein anderes Rad so in Bewegung gesetzt werden, dass dieses 12 Mal in der Minute umläuft; man fragt, wie viele Zähne man dem letzteren Rade geben muss. Die hier zu Grunde liegende rein mathematische Aufgabe besteht einfach darin, 100 durch 12 zu dividiren, und sind die Brüche einmal begrifflich festgestellt worden, so hat die Auflösung keine Schwierigkeit, sie liefert $8^1/_3$. Das Auftreten dieses Bruches aber zeigt zugleich die Unmöglichkeit an, die ursprünglich gestellte Aufgabe zu lösen, da die zu bestimmende Anzahl der Zähne des zweiten Rades eine ganze Zahl sein muss.

Die dritte indirecte Operation ist die Wurzelausziehung. Setzt man

$$\sqrt[n]{a} = x,$$

wo n eine positive ganze Zahl bedeute, so ist die Aufgabe, eine dieser Gleichung entsprechende Grösse x zu finden, durch ganze Zahlen oder rationale Brüche nicht mehr lösbar, sobald a nicht die $n$te Potenz einer solchen Grösse ist. In diesem Falle tritt also wieder die Nothwendigkeit ein, die Aufgabe durch Einführung neuer Begriffe lösbar zu machen. Ist nun entweder a po-

sitiv, oder wenn a negativ ist, n eine ungerade Zahl, so sind die neu einzuführenden Begriffe die irrationalen Grössen; ist aber a negativ und zugleich n eine gerade Zahl, so entstehen als neue Begriffe die imaginären Grössen. Es liegt nun ebenso wenig die Unmöglichkeit vor, diese letzteren begrifflich festzustellen, wie die irrationalen Grössen oder wie früher die rationalen Brüche und die negativen Grössen, denn bei keiner der hier aufzustellenden Definitionen stösst man auf einen inneren Widerspruch. Wenn ein solcher einträte, wenn Eigenschaften mit einander in Verbindung gesetzt würden, von denen bewiesen werden kann, dass sie nicht mit einander bestehen können, dann allerdings hätte man es wirklich mit etwas Unmöglichem zu thun. *Gauss**) führt als ein Beispiel einer solchen Unmöglichkeit ein ebenes rechtwinkliges gleichseitiges Dreieck an. In der That wird bewiesen, dass ein ebenes gleichseitiges Dreieck nicht zugleich rechtwinklig sein kann. Hier läge also wirklich etwas Unmögliches vor.

Wenn nun schon das Auftreten von negativen Grössen oder von Brüchen bisweilen die Unmöglichkeit einer Aufgabe kund giebt, so ist leicht begreiflich, dass diese auch durch imaginäre Grössen angezeigt werden kann, wie in folgendem Beispiel: Eine gegebene Gerade von der Länge 2 soll in zwei solche Theile getheilt werden, dass das aus ihnen gebildete Rechteck den Inhalt 4 habe. Der rein mathematische Inhalt dieser Aufgabe ist, zwei Zahlen zu finden, deren Summe gleich 2, und deren Product gleich 4 ist. Wird nun nur verlangt, dass diese Zahlen mathematische Grössen seien, ohne näher anzugeben, welcher Art sie sein sollen, so hat die Auflösung, nachdem die imaginären Grössen einmal begrifflich festgestellt worden sind, keine Schwierigkeit. Sie führt auf die Auflösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2x + 4 = 0,$$

deren Wurzeln die imaginären Zahlen

$$1 + \sqrt{-3} \quad \text{und} \quad 1 - \sqrt{-3}$$

sind. Nimmt man aber auf die ursprüngliche Aufgabe Rücksicht, wonach die gesuchten Grössen Theile einer geraden Linie bedeuten sollen und daher reelle Grössen sein müssen, dann ist die

*) Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. (Inaug. Diss.) pag. 4. Note.

Aufgabe zu lösen unmöglich, weil das grösste aus zweien Theilen der Linie 2 gebildete Rechteck den Inhalt 1 hat, und daher keines den Inhalt 4 haben kann; und diese Unmöglichkeit wird hier durch das Auftreten imaginärer Grössen angezeigt. *Montucla* *) hat dies nämliche Beispiel als Beleg für die Ansicht gewählt, dass in der Unmöglichkeit einer Aufgabe überhaupt die Bedeutung und Entstehung der imaginären Grössen zu suchen sei, indem sie dann aufträten, wenn man eine Aufgabe stelle, welche eine unmögliche oder absurde Forderung enthalte. Wir haben gesehen, dass ganz dasselbe auch von den negativen Grössen und den Brüchen behauptet werden könnte, und die Worte: „Ainsi toutes les fois que la résolution d'un problème conduit à de semblables expressions et que parmi les différentes valeurs de l'inconnue il n'y en a que de telles, le problème, ou pour mieux dire, ce qu'on demande est impossible.“ und weiterhin: „Le problème, qui conduirait à une pareille équation, serait impossible ou ne présenterait qu'une demande absurde“ lassen sich fast wörtlich auf die beiden früher angeführten Beispiele anwenden, in denen die Unmöglichkeit der Aufgabe durch eine negative Zahl und durch einen Bruch angezeigt wurde.

Aus den vorigen Erörterungen erhellt, dass die imaginären, die irrationalen, die rational gebrochenen und die negativen Grössen eine gemeinsame Entstehungsart haben, nämlich durch die indirecten Operationen, bei welchen ihre Einführung durch den Fortschritt der Wissenschaft nothwendig gemacht wird. Sie alle finden ihre Existenz in ihrer Definition begründet, welche bei keiner etwas Unmögliches in sich schliesst; bei allen aber kann es Fälle geben, wo ihr Auftreten wegen der besonderen Natur der Aufgabe die Unmöglichkeit diese zu lösen kund giebt.

Ehe wir nun zu unserem eigentlichen Gegenstande übergehen, sei noch eine Bemerkung über das Rechnen mit den imaginären Grössen erlaubt. Auch hier können wir wieder an die ihnen verwandten Grössen anknüpfen. Jedesmal, wenn in die Mathematik ein neuer Begriff eingeführt wird, ist es an und für sich in vieler Beziehung eine Sache der Willkür, in welcher Weise man die Operationen, denen man die früheren Begriffe unterwirft, auf den neuen Begriff übertragen will. Nachdem z. B.

*) Histoire des mathématiques. Tome III. pag. 27.

die Definition der Potenzen mit ganzen positiven Exponenten aus der wiederholten Multiplication einer Grösse mit sich selber hergeleitet ist, entsteht die Frage, was man unter einer Potenz mit einem negativen Exponenten zu verstehen habe. An und für sich ist dieses ganz willkürlich, indem es nichts giebt, was uns zwingt, etwas Bestimmtes darunter zu verstehen. Allein, wenn man hier und in allen ähnlichen Fällen ganz willkürlich verfahren wäre und sich nicht an eine bestimmte Norm gebunden hätte, so würde das mathematische Gebäude gewiss eine seltsame, die Uebersicht gewaltig erschwerende Gestalt erhalten haben. Die äussere Consequenz und die harmonische Uebereinstimmung in allen ihren Theilen verdankt die Mathematik der Befolgung des Grundsatzes, dass man jedesmal, wenn man einen neu eingeführten Begriff den früher bekannt gewordenen Operationen unterwirft, die von diesen Operationen geltenden Hauptsätze auch dann noch als fortbestehend annimmt, wenn man jene auf die neuen Begriffe überträgt. Diese an und für sich willkürliche Annahme ist so lange zu machen erlaubt, als daraus nicht Widersprüche entstehen. Wenn nun dieser Grundsatz befolgt wird, dann sind die Definitionen, von denen oben die Rede war, nicht mehr willkürlich, sondern ergeben sich als nothwendige Folge jenes Grundsatzes. Bei den Potenzen wird z. B. bewiesen, dass, wenn m und n zwei positive ganze Zahlen sind, und $m > n$ angenommen wird,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

ist. Nun wird willkürlich festgesetzt, dass dieser Satz auch dann noch richtig bleibe, wenn $m < n$, also $m - n = -p$ eine negative Zahl ist; und dann folgt, dass man

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

zu setzen habe, wodurch die Bedeutung einer Potenz mit einem negativen Exponenten nun bestimmt festgestellt ist.

Dass der obige Grundsatz, trotzdem dass seine Annahme durchaus nicht nothwendig, sondern willkürlich ist, für die Mathematik die grösste Wichtigkeit besitzt, bedarf wohl keiner näheren Auseinandersetzung. Man braucht sich nur zu vergegenwärtigen, wie das System der Mathematik beschaffen sein würde, wenn jener Grundsatz nicht befolgt wäre, um sofort zu erkennen, welche

Unterscheidungen man bei jedem Schritte zu machen gezwungen wäre, und wie schwerfällig alsdann der Gang der Beweise sein würde. Die durch diesen Grundsatz herbeigeführte in weiter Ausdehnung stattfindende Allgemeingültigkeit der mathematischen Sätze lässt auch eine andre Erscheinung in der Geschichte der Mathematik begreifen, nämlich die eine Zeit lang so weit auseinandergehenden Ansichten über die Bedeutung der divergenten Reihen. Da man gewohnt war, fast alle mathematischen Sätze als allgemein gültig zu betrachten, so bedurfte es längerer Zeit, bis die Ueberzeugung durchdrang, dass bei den Reihenentwickelungen die Resultate nur unter gewissen beschränkenden Bedingungen Geltung haben, und dass überhaupt bei der Einführung des Unendlichen in die Mathematik jener Grundsatz nicht so unbedingt zur Anwendung gebracht werden darf, wie sonst.

Bei der Uebertragung der mathematischen Operationen auf die imaginären Grössen findet nun aber der obige Grundsatz volle Anwendung, und es ist vollständig nachgewiesen, dass dabei keinerlei Widersprüche eintreten. Es liegt nicht in der Absicht, diesen Nachweis hier zu wiederholen; erwähnt mag aber werden, dass jener Grundsatz, obwohl sonst stets befolgt, doch gerade bei den imaginären Grössen nicht von jeher und allgemein anerkannt wurde. Noch zu *Euler's* Zeit waren die Mathematiker gar nicht darüber einig, was man unter dem Product zweier Quadratwurzeln aus negativen Grössen zu verstehen habe. *Euler* selbst setzte obigem Grundsatze gemäss, und wie jetzt allgemein angenommen wird, wenn a und b zwei positive Grössen bedeuten,

$$\sqrt{-a}\,.\,\sqrt{-b}=\sqrt{ab},$$

also das Product dieser beiden imaginären Grössen einer reellen Grösse gleich. Dies wurde aber nicht allgemein anerkannt, vielmehr glaubte *Emerson*, ein englischer Mathematiker, dass man annehmen müsse, es sei

$$\sqrt{-a}\,.\,\sqrt{-b}=\sqrt{-ab},$$

weil es absurd sei, anzunehmen, dass das Product zweier unmöglicher Grössen nicht auch unmöglich sei; und *Hutton* sagt in seinem mathematischen Wörterbuche*), dass zu seiner Zeit die Ansichten der Mathematiker hierüber ziemlich gleich getheilt seien.

*) *Hutton*, Mathematical dictionary. 1796.

* * *

Eine der bemerkenswerthen Eigenschaften, welche die imaginären Grössen besitzen, ist die, dass man alle auf eine einzige, nämlich auf die Grösse $\sqrt{-1}$ zurückführen kann, für welche *Gauss* den jetzt allgemein gebräuchlichen Buchstaben i eingeführt hat.*) Mittelst derselben lässt sich ferner jede imaginäre Grösse z auf die Form

$$z = x + iy$$

bringen, in welcher x und y reelle Grössen bedeuten. Eine Grösse von dieser Form hat *Gauss* eine complexe Grösse genannt,**) indem er diesen Namen der allgemeinen Bedeutung, wonach derselbe eine irgend wie aus ungleichartigen Theilen zusammengesetzte Grösse bezeichnete, und in dieser Bedeutung früher hie und da angewendet wurde, entkleidete und ihn zur Bezeichnung der besonderen ungleichartigen Zusammensetzung verwendete, bei welcher eine Grösse aus einem reellen und einem imaginären Theile, die durch Addition verbunden sind, besteht.

Die complexen Grössen umfassen zugleich die reellen mit, nämlich in dem Falle, dass die reelle Grösse y den Werth Null hat. Wenn dagegen die andre reelle Grösse x gleich Null ist, also z die Form

$$z = iy$$

hat, pflegt man die complexe Grösse rein imaginär zu nennen.

Wenn in der Grösse $z = x + iy$ die beiden reellen Grössen x und y, oder mindestens eine von ihnen, veränderlich ist, so nennt man z eine complexe veränderliche Grösse. Damit eine solche den Werth Null erhalte, ist erforderlich, dass beide reelle Grössen x und y zugleich verschwinden, weil es nicht möglich ist, dass sich die beiden ungleichartigen Grössen, die reelle, x, und die imaginäre, iy, gegenseitig aufheben. Dagegen genügt es zum Unendlichwerden der complexen Grösse z, wenn nur einer ihrer beiden reellen Bestandtheile, x oder y, unendlich wird. Ebenso tritt in z eine andere Unterbrechung der Stetigkeit ein, sobald nur eine der reellen Grössen x oder y eine solche erleidet. So lange aber x und y beide sich stetig ändern, nennt man auch z eine stetig veränderliche complexe Grösse.

*) Die erste Stelle, in welcher diese Bezeichnung angewendet ist, findet sich: Disquisitiones arithmeticae. Sect. VII. Art. 337.

**) Theoria residuorum biquadraticorum. Comment. societatis Gottingensis. Vol. VII (ad 1828—32) pag. 96.

Schon die Betrachtung der reellen Veränderlichen und ihrer Functionen wird durch die geometrische Darstellung derselben wesentlich erleichtert und anschaulich gemacht. Dies ist nun in erhöhtem Maasse bei den complexen Veränderlichen der Fall; daher wollen wir uns zuerst mit der Art und Weise beschäftigen, wie man imaginäre Grössen bildlich darstellen kann.

Erster Abschnitt.

Geometrische Darstellung der imaginären Grössen.

---

§ 1.

Um sich von einer reellen veränderlichen Grösse ein geometrisches Bild zu machen, denkt man sich bekanntlich einen Punct, der sich auf einer geraden Linie bewegt. Auf derselben, die wir die x-Axe oder auch die Haupt-Axe nennen wollen, nimmt man einen festen Punct o (den Nullpunct) an und stellt den Werth einer veränderlichen Grösse x durch den Abstand $\overline{op}$ eines auf der x-Axe liegenden Punctes p vom Nullpuncte o dar. Dabei nimmt man zugleich auf die Richtung, in welcher die Strecke $\overline{op}$ von o aus gerechnet liegt, Rücksicht, indem ein positiver Werth von x durch eine Strecke $\overline{op}$ nach der einen Seite (etwa nach rechts, wenn man sich die x-Axe horizontal liegend denkt), ein negativer Werth von x dagegen durch eine Strecke $\overline{op'}$ nach der andern Seite (nach links) repräsentirt wird. Wenn nun x seinen Werth ändert, so ändert sich auch die Strecke $\overline{op}$, indem der Punct p seine Lage auf der x-Axe ändert. Man kann daher entweder sagen, dass durch jeden Werth von x die Lage eines Punctes p auf der x-Axe gegeben ist, oder dass durch ihn die Länge einer begrenzten Geraden in einer von zwei einander direct entgegengesetzten Richtungen bestimmt wird.

Eine complexe veränderliche Grösse $z = x + iy$ hängt nun von zwei gänzlich von einander unabhängigen reellen Veränderlichen x und y ab. Zur geometrischen Verbildlichung einer complexen Grösse wird daher ein Gebiet einer Dimension, eine ge-

rade Linie, nicht mehr ausreichen, sondern es wird dazu eines Gebietes von zwei Dimensionen, einer Ebene, bedürfen. Man kann nun die Art der Veränderlichkeit einer complexen Grösse dadurch wiedergeben, dass man annimmt, es werde durch einen complexen Werth $z = x + iy$ ein Punkt p der Ebene in der Weise bestimmt, dass seine rechtwinkligen Coordinaten in Bezug auf zwei in der Ebene fest angenommene Coordinaten-Axen die Werthe der reellen Grössen x und y haben. Zuerst nämlich schliesst diese Darstellungsweise die der reellen Veränderlichen in sich, denn sobald z reell, also $y = 0$ ist, liegt der darstellende Punct p auf der x-Axe. Es können sich ferner die Coordinaten des Punctes p gerade wie die veränderlichen Grössen x und y, jede von der anderen ganz unabhängig ändern, sodass der Punct p seine Lage in der Ebene nach allen Richtungen hin ändern kann. Es kann auch eine der beiden Grössen x und y constant bleiben, während nur die andere ihren Werth ändert, in diesem Falle würde der Punct p eine der x- oder der y-Axe parallele Gerade beschreiben. Endlich ist auch umgekehrt für jeden Punct der Ebene der zugehörige Werth von z vollständig bestimmt, da durch die Lage des Punctes p seine beiden rechtwinkligen Coordinaten, also auch die Werthe von x und y gegeben sind.

Statt die Lage des die Grösse z darstellenden Punctes durch rechtwinklige Coordinaten x und y zu bestimmen, kann dies auch durch Polarcoordinaten geschehn. Setzt man nämlich

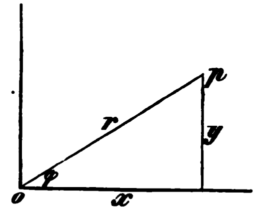
$$x = r \cos \varphi \qquad y = r \sin \varphi,$$

so folgt

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

Alsdann giebt die reelle und stets positiv zu nehmende Grösse r, welche der **Modul** der complexen Grösse z genannt wird, die absolute Länge der Strecke $\overline{op}$ (Fig. 1), und φ die Neigung derselben gegen die Hauptaxe an. Man kann daher auch sagen, dass eine complexe Grösse $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ eine gerade Linie **ihrer Länge und Richtung nach** darstellt, nämlich eine gerade Linie, deren Länge $= r$ ist, und die mit der Hauptaxe einen Winkel $= \varphi$ bildet. Die von diesem Winkel, also von der Richtung allein abhängige Grösse

Fig. 1.



$$\cos\varphi + i\sin\varphi$$

pflegt dann der Richtungscoefficient der complexen Grösse z genannt zu werden.

Ebenso wie beliebig liegende begrenzte gerade Linien ohne Rücksicht auf ihre Richtung und Lage in der Ebene, oder höchstens mit Berücksichtigung von einander direct entgegengesetzten Richtungen durch reelle Zahlen ausgedrückt werden, so können nun durch complexe Zahlen gerade Linien ausgedrückt werden, welche sowohl ihrer Länge als auch ihrer Richtung nach bestimmt sind, auf deren Lage in der Ebene es aber weiter nicht ankommt. Zwei begrenzte gerade Linien in einer Ebene unterscheiden sich nämlich eigentlich vollständig in drei Stücken, in ihrer Länge, ihrer Richtung und ihrer Lage, d. h. der Lage desjenigen Punctes, von welchem man die Strecke als beginnend annimmt. Man kann nun aber von zweien dieser Unterscheidungsmerkmale abstrahiren und zwei Strecken als gleich betrachten, wenn sie nur gleiche Länge haben; dies geschieht bei der Darstellung der Strecken durch reelle Grössen. Bei der Darstellung durch complexe Grössen aber abstrahirt man nur von dem dritten Unterscheidungsmerkmal, der Lage, und nennt zwei Strecken dann und nur dann gleich, wenn sie sowohl gleiche Länge als auch gleiche Richtung haben.

Da der Modul einer complexen Grösse die absolute Länge der geraden Linie angiebt, welche jene Grösse repräsentirt, so ist derselbe dem absoluten Werthe einer negativen Grösse analog und dient als Maass bei der Vergleichung complexer Grössen unter einander.

§ 2.

Die Eigenschaft complexer Grössen, dass eine Verbindung zweier oder mehrerer derselben durch mathematische Operationen immer wieder auf eine complexe Grösse führt, hat zur Folge, dass wenn man gegebene complexe Grössen durch Puncte darstellt, das Resultat ihrer Verbindung sich wieder durch einen Punct darstellen lässt. Wir wollen nun im Folgenden die vier ersten algebraischen Operationen, die Addition, Subtraction, Multiplication und Division durchgehen und untersuchen, wie sich die aus diesen hervorgehenden Puncte geometrisch finden lassen. Dabei

sollen die einzelnen Puncte immer mit denselben Buchstaben bezeichnet werden, wie die durch sie dargestellten complexen Grössen; der Nullpunct, welcher den Werth Null darstellt, werde mit o bezeichnet.

1. Addition.

Sind

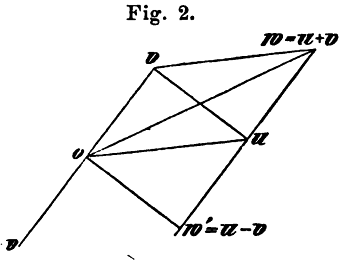
$$u = x + iy \text{ und } v = x' + iy'$$

zwei complexe Grössen, und bezeichnet man mit w ihre Summe, so ist

$$w = u + v = (x + x') + i(y + y').$$

Der Punct w hat also die Coordinaten $x + x'$ und $y + y'$. Daraus folgt, dass er der vierte Eckpunct des Parallelogramms ist, das aus den Seiten $\overline{ou}$ und $\overline{ov}$ gebildet werden kann, oder dass durch die Grösse $u + v$ die Diagonale $\overline{ow}$ dieses Parallelogramms nach Grösse und Richtung dargestellt wird (Fig. 2). Da die Geraden $\overline{uw}$ und $\overline{ov}$ gleich und direct parallel sind, und daher $\overline{uw}$ ebenfalls durch die complexe Grösse v dargestellt wird, so gelangt man zu dem nämlichen Puncte w, wenn man an den Endpunct u der ersten Geraden, $\overline{ou}$, die zweite $\overline{ov}$ in ihrer gegebenen Richtung und Länge anfügt. Diese Art der Zusammensetzung oder geometrischen Addition gerader Linien ist auch unabhängig von der Betrachtung imaginärer Grössen von *Möbius**) angewendet worden. Die Summe $u + v$ ist hiernach die dritte Seite eines Dreiecks, dessen andere Seiten durch u und v dargestellt werden. Da nun in jedem Dreiecke eine Seite kleiner ist, als die Summe der beiden andern, und die Längen der Seiten durch die Moduln der complexen Grössen angegeben werden, so folgt der Satz: dass der Modul der Summe zweier complexer Grössen immer kleiner ist, als die Summe ihrer einzelnen Moduln:

Fig. 2.



$$\text{mod}\,(u + v) < \text{mod}\,u + \text{mod}\,v.$$

*) Siehe u. a. *Möbius*, Die Elemente der Mechanik des Himmels. Leipzig 1843. pag. 4.

Die complexe Grösse $z = x + iy$ erscheint selbst unter der Form einer Summe aus der reellen Grösse x und der rein imaginären iy; da erstere einen Punct der x-Axe, letztere einen Punct der y-Axe darstellt, so ist z wirklich der vierte Eckpunct des Rechtecks, dessen Seiten von der Abscisse x und der Ordinate y des Punctes z gebildet werden.

2. Subtraction.

Die Subtraction zweier Puncte ergiebt sich leicht aus der Addition; denn soll

$$w' = u - v$$

sein, so folgt

$$u = v + w';$$

also muss der Punct w' so liegen, dass $\overline{ou}$ die Diagonale des aus $\overline{ov}$ und $\overline{ow'}$ gebildeten Parallelogramms wird (Fig. 2). Demnach erhält man w', wenn man $\overline{ow'}$ der Geraden $\overline{vu}$ gleich und direct parallel zieht. Da es nun wieder auf die Lage einer Geraden nicht ankommt, sondern nur auf ihre Länge und Richtung, so stellt die Differenz $u - v$ die Gerade $\overline{vu}$ ihrer Länge und Richtung nach (nämlich von v nach u) dar. Die Construction zeigt, dass u in der Mitte der Geraden $\overline{ww'}$ liegt.

Fig. 2.

Nun folgt aber aus

$$w = u + v \quad , \quad w' = u - v$$

$$u = \frac{w + w'}{2},$$

also bildet ein Punct $\frac{w + w'}{2}$ immer den Mittelpunct der Verbindungslinie der Puncte w und w'.

Fällt der Punct u mit dem Nullpunct zusammen, d. h. ist $u = 0$, so wird $w' = -v$. In diesem Falle hat man von o aus eine der Geraden $\overline{vo}$ in Richtung und Länge gleiche Gerade zu ziehen, und daher liegt der Punct $-v$ dem Puncte v diametral gegenüber und in gleicher Entfernung vom Nullpuncte wie der letztere.

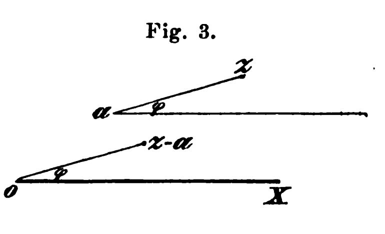
Die Subtraction bietet ein Mittel dar, Puncte auf einen an-

dern Nullpunct zu beziehen. Denn es leuchtet ein, dass ein Punct z zu einem Puncte a gerade so liegt, wie $z - a$ gegen den Nullpunct (Fig. 3). Setzt man dann

$$z - a = r (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

so bedeutet r die Entfernung $\overline{az}$, und φ die Neigung der Geraden $\overline{az}$ gegen die Hauptaxe. Die Einführung von $z' = z - a$ oder die Substitution von $z + a$ für z verlegt also den Nullpunct nach a, ohne jedoch die Richtung der Hauptaxe zu ändern.

Fig. 3.



3. Multiplication.

Wir benutzen hier den Ausdruck der complexen Grössen durch Polarcoordinaten. Seien

$$u = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \text{ und } v = r' (\cos \varphi' + i \sin \varphi')$$

zwei durch ihre Polarcoordinaten gegebene Puncte, und w ihr Product, so ist

$$w = u.v = rr' (\cos (\varphi + \varphi') + i \sin (\varphi + \varphi')).$$

Demnach bildet der Radius Vector von w mit der Hauptaxe den Winkel $\varphi + \varphi'$, und seine Länge ist gleich dem Product der Zahlen r und r', welche die Längen der Radien Vectoren von u und v angeben. Hieraus geht hervor, dass die Lage des Punctes w oder $u.v$ wesentlich von der als Längeneinheit angenommenen Geraden abhängt, während die Lage von $u + v$ und $u - v$ von dieser Längeneinheit unabhängig ist. Dies liegt auch ganz in der Natur der Sache, denn vergrössert man in u und v die Längeneinheit in dem Verhältnisse von 1 zu ϱ, wo ϱ irgend eine reelle Zahl bedeute, so werden die Radien Vectoren von $u + v$ und $u - v$ in demselben Verhältnisse vergrössert, der Radius Vector von $u.v$ dagegen im Verhältnisse von 1 zu ϱ^2. Man nehme daher auf der positiven Seite der Hauptaxe einen Punct 1 so liegend an, dass $\overline{o1}$ gleich der angenommenen Längeneinheit ist (Fig. 4). Da alsdann aus der Gleichung

$$\overline{ow} = r.r'$$

die Proportion

$$1 : r = r' : \overline{ow}$$

oder

$$\overline{o1} : \overline{ou} = \overline{ov} : \overline{ow}$$

folgt, und ausserdem

$$\angle\, vow = 1ou$$

ist, so ist die Lage des Punctes w dadurch zu construiren, dass man die Dreiecke vow und $1ou$ gleichstimmig ähnlich macht. Statt dessen könnte man natürlich auch die Dreiecke uow und $1ov$ gleichstimmig ähnlich machen, was sich analytisch dadurch manifestirt, dass man in dem Product $u.v$ die Factoren mit einander vertauschen kann. Aus der Gleichung

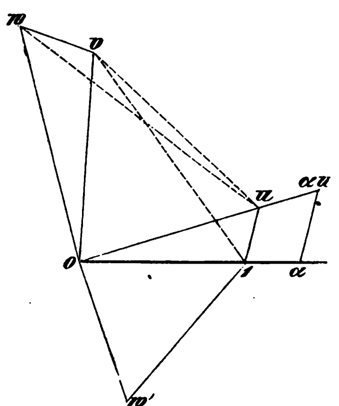
$$w = u.v$$

kann man ebenfalls eine Proportion ziehen, nämlich

$$1 : u = v : w;$$

daher stehen die Geraden $\overline{o1}$, $\overline{ou}$, $\overline{ov}$, $\overline{ow}$, auch wenn man ihre Richtung berücksichtigt, in Proportion. In Verbindung mit dem Vorigen ergiebt sich aber hieraus, dass wenn gerade Linien nicht bloss in Rücksicht ihrer Länge, sondern auch in Rücksicht ihrer Richtung mit einander verglichen werden, zwei Paare solcher Geraden dann und nur dann in Proportion stehen, wenn sie nicht bloss ihrer Länge nach proportional sind, sondern auch paarweise gleiche Winkel einschliessen; oder mit andern Worten, wenn sie entsprechende Seiten zweier gleichstimmig ähnlicher Dreiecke sind. Berücksichtigt man nun dieses Erforderniss, so kann die zuletzt aufgestellte Proportion dazu dienen, um auf die einfachste Weise zu finden, welche Dreiecke man einander ähnlich zu machen habe.

Fig. 4.



Ist in dem Product $u.v$ der eine der beiden Factoren reell, z. B. v, und bezeichnen wir ihn in diesem Falle durch α, so liegt der Punct α auf der Hauptaxe, und daher ergiebt die vorher angegebene Construction, dass der Punct $\alpha.u$ auf der Geraden $\overline{ou}$ liegt und zwar so, dass sein Radius Vector das α-fache des Radius Vectors von u ist.

Hiernach ist die geometrische Bedeutung der Multiplication folgende: Wird eine Grösse u mit einer reellen Grösse α multi-

plicirt, so wird dadurch nur der Radius Vector von u im Verhältnisse von 1 zu a vergrössert; wird aber u mit einer complexen Grösse v multiplicirt, so wird der Radius Vector von u nicht bloss im Verhältnisse von 1 zu mod v vergrössert, sondern auch zugleich um den Neigungswinkel von v nach der Richtung gedreht, nach welcher die Neigungswinkel wachsen.

4. Division.

Diese erledigt sich unmittelbar durch die vorigen Ergebnisse. Denn soll

$$w' = \frac{u}{v}$$

sein, so zieht man hieraus die Proportion

$$1 : w' = v : u$$

und hat daher die Dreiecke $1ow'$ und vou gleichstimmig ähnlich zu machen (Fig. 4). Die geometrische Ausführung der Division von u durch v besteht also darin, dass der Radius Vector von u im Verhältnisse von 1 zu mod v verkleinert und zugleich um den Neigungswinkel von v nach der Richtung gedreht wird, nach welcher die Neigungswinkel abnehmen.

Wir wenden nun die vorigen Betrachtungen noch auf zwei Aufgaben an, die uns im Späteren von Nutzen sein werden.

Erstens. Seien z, z' und a drei gegebene Grössen, also auch drei gegebene Puncte; man soll einen vierten Punct w so bestimmen, dass

$$w = \frac{z' - z}{z - a}$$

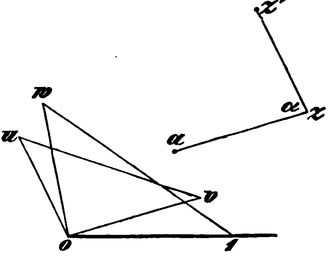
ist (Fig. 5). Setzt man $z' - z = u$, $z - a = v$, so findet man zuerst die Puncte u und v, indem man $\overline{ou}$ gleich und parallel $\overline{zz'}$, und $\overline{ov}$ gleich und parallel $\overline{az}$ zieht.

Nun ist $w = \frac{u}{v}$ oder $1 : w = v : u$; daher erhält man w, wenn man

$$\Delta\, 1ow \sim vou$$

macht. Hieraus kann nun auch ein Ausdruck für die Grösse w abgeleitet werden, der aus den Seiten $\overline{zz'}$ und $\overline{az}$ und dem Winkel azz' des Dreieckes azz' gebildet ist. Bezeichnet man nämlich diesen Winkel mit α, so ist

Fig. 5.



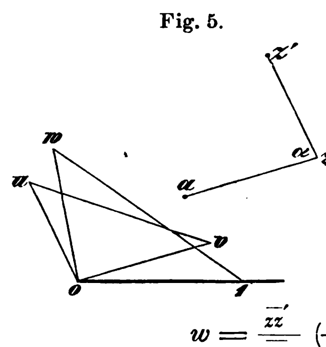


Fig. 5.

$\angle\, 1ow = vou = 180^\circ - \alpha.$

Ferner ist

$$\overline{ow} = \frac{\overline{ou}}{\overline{ov}} = \frac{\overline{zz'}}{\overline{az}},$$

folglich ist der Modul von w gleich $\frac{\overline{zz'}}{\overline{az}}$, und der Richtungscoefficient gleich $(-\cos\alpha + i\sin\alpha)$, und man hat

$$w = \frac{\overline{zz'}}{\overline{az}}\,(-\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

In dem speciellen Falle, dass $\overline{az}$ senkrecht auf $\overline{zz'}$ steht, ist $\alpha = 90^0$, und dann erhält man

$$w = i\,\frac{\overline{zz'}}{\overline{az}}.$$

Zweitens: In welcher Beziehung stehen zwei Mal drei Puncte z, z', z'' und w, w', w'', wenn zwischen ihnen die Gleichung

$$\frac{z'-z}{z''-z} = \frac{w'-w}{w''-w}$$

besteht? (Fig. 6). Man hat hier unmittelbar die Proportion

$$z''-z : z'-z = w''-w : w'-w;$$

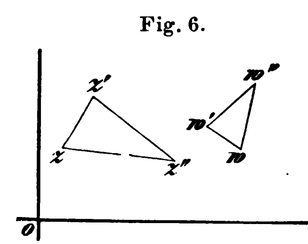


Fig. 6.

und da die Differenzen die Abstände der entsprechenden Puncte in Bezug auf Länge und Richtung bedeuten, so folgt augenblicklich, dass die Dreiecke

$$z'\,z\,z'' \text{ und } w'\,w\,w''$$

gleichstimmig ähnlich sind.

Wir brechen diese Betrachtungen hier ab, indem wir die Construction der Potenzen als für unsere Zwecke nicht nothwendig übergehen. Bei reellen ganzen Exponenten ergiebt sich dieselbe übrigens unmittelbar aus einer wiederholten Anwendung der Multiplication.*) Nur eine Bemerkung möge hier noch Platz finden. Wenn man irgend eine analytische Beziehung zwischen beliebigen Grössen

*) Für beliebige Potenzen möge auf einen Aufsatz: „Ueber die geometrische Darstellung der Werthe einer Potenz mit complexer Basis und complexem Exponenten" (*Schlömilch's* Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. V. pag. 345.) verwiesen werden.

hat und die auf beiden Seiten der Gleichung vorkommenden analytischen Operationen geometrisch ausführt, so wird man durch zwei verschiedene Constructionen zu dem nämlichen Puncte geführt. Daher ist in jeder analytischen Gleichung zugleich ein geometrischer Satz enthalten. So überzeugt man sich z. B. leicht, dass die Identität

$$\frac{u+v}{2} = v + \frac{u-v}{2}$$

den Satz liefert, dass die Diagonalen eines Parallelogramms sich gegenseitig halbiren.*)

§ 3.

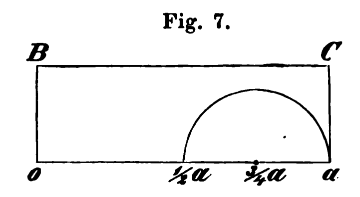
Die besprochene Art, complexe Werthe durch Puncte in einer Ebene geometrisch darzustellen, gewährt nun auch ein anschauliches Bild von einer complexen stetig veränderlichen Grösse. Denkt man sich nämlich eine Reihe stetig auf einander folgender Werthe von $z = x + iy$, also auch eine Reihe stetig auf einander folgender und zusammengehöriger Werthenpaare von x und y, und stellt jeden Werth von z durch einen Punct dar, so werden diese Puncte ebenfalls eine stetige Aufeinanderfolge, d. h. in ihrer Gesammtheit eine Linie bilden. Wenn daher die Variable z sich stetig ändert, so beschreibt der darstellende Punct z eine ununterbrochene Linie. Da sich dabei die reellen Veränderlichen x und y jede ganz unabhängig von der andern ändern können, so kann auch der darstellende Punct z jede beliebige Linie beschreiben. Hierbei verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass es zur Stetigkeit der Veränderung von z durchaus nicht nothwendig ist, dass die von dem darstellenden Puncte beschriebene Linie eine nach einem und demselben mathematischen Gesetze fortgehende Curve sei, d. h., dass die ganz beliebige Beziehung, in welcher x und y an jeder Stelle zu einander stehen müssen, immer durch dieselbe Gleichung (oder überhaupt durch eine solche) ausdrückbar sei. Damit die Veränderung von z stetig vor sich gehe, ist nur erforderlich, dass die Linie einen ununterbrochenen

---

*) Ueber die weitere Ausführung der hiermit zusammenhängenden Betrachtnngen sei auf die bemerkenswerthe Abhandlung von *Siebeck*: Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen. (Crelle's Journ. Bd. 55. pag. 221) verwiesen.

Zug bilde. Einige Beispiele mögen dies erläutern. Denken wir uns, die Veränderliche z beginne ihre Veränderung mit dem Werthe $z = 0$ und gelange, nachdem sie eine Reihe von Werthen durchlaufen hat, zu einem reellen positiven Werthe a, welcher durch den Punct a (Fig. 7) auf der x-Axe dargestellt werden möge, indem die Entfernung $\overline{oa} = a$ sei. Nun kann die Veränderliche z (so drücken wir uns kurz aus, anstatt zu sagen: der bewegliche Punct, welcher den jedesmaligen Werth der Variablen z darstellt) auf sehr verschiedenen Wegen von o nach a gelangen. Erstlich kann sie zwischen o und a nur reelle Werthe annehmen; dann bleibt y constant $= 0$, und x wächst von 0 bis a. Die Variable beschreibt die Gerade $\overline{oa}$. Zweitens durchlaufe die Variable z die aus drei Seiten eines Rechtecks bestehende gebrochene Linie $oBCa$, bei welcher $\overline{oB} = b$ sei. Dann ist x von o bis B constant $= 0$, und y wächst von 0 bis b, sodass in B, $z = ib$ ist; alsdann bleibt y auf dem erlangten Werthe b stehn, und x wächst von 0 bis a, sodass z in C den Werth $a + ib$ erlangt; endlich bleibt von C bis a nun x constant $= a$, und y nimmt von b bis 0 ab. Drittens möge die Variable z zuerst auf der Hauptaxe von o bis $\frac{1}{2}a$ gehen und dann einen um den Punct $\frac{3}{4}a$ als Mittelpunct mit einem Radius $= \frac{1}{4}a$ beschriebenen Halbkreis durchlaufen. Wir zeigen an diesem Beispiele zugleich die Verlegung des Nullpuncts. Wegen der um den Punct $\frac{3}{4}a$ beschriebenen Kreisbewegung wird nämlich der Gang der reellen Variabeln einfacher, wenn man setzt

Fig. 7.



$$z - \tfrac{3}{4}a = z' = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Alsdann werden die Radien Vectoren von dem Puncte $\frac{3}{4}a$ aus gerechnet. Nun ist im Nullpuncte $z = 0$, also $z' = -\frac{3}{4}a$, und daher $r = \frac{3}{4}a$, $\varphi = \pi$. Auf dem Wege von o bis $\frac{1}{2}a$ bleibt dann φ constant $= \pi$, und r nimmt von $\frac{3}{4}a$ bis $\frac{1}{4}a$ ab, so dass beim Beginn des Kreises $z' = -\frac{1}{4}a$, und daher $z = \frac{1}{2}a$ ist. Beim Durchlaufen des Kreises bleibt nun r constant $= \frac{1}{4}a$, und φ nimmt von π bis 0 ab, sodass in a, $z' = +\frac{1}{4}a$, also $z = a$ ist. Hierbei haben wir angenommen und werden dasselbe auch in Zukunft immer thun, dass der Neigungswinkel φ einer complexen Grösse von der Richtung der positiven x-Axe nach der

der positiven y-Axe hin wachse, und wir werden diese Richtung die Richtung der wachsenden Winkel nennen.

Man sieht aus diesen Beispielen, dass zwischen einer veränderlichen Grösse, welche nur reelle Werthe annehmen darf, und einer solchen, der man auch imaginäre Werthe anzunehmen gestattet, ein sehr wesentlicher Unterschied stattfindet. Während durch zwei bestimmte Werthe einer reellen Variablen die Reihe der dazwischen liegenden Werthe, welche die Veränderliche annehmen muss, um von dem ersten zum zweiten Werthe zu gelangen, schon mit bestimmt ist, ist dies bei einer complexen Veränderlichen keineswegs der Fall, vielmehr giebt es unendlich viele Reihen stetig auf einander folgender Werthe, welche von einem bestimmten Werthe einer complexen Variablen zu einem andern bestimmten Werthe hinführen. Geometrisch ausgedrückt kann man sagen: eine reelle Veränderliche kann nur auf einem einzigen Wege von einem Puncte zu einem andern gelangen, nämlich nur auf dem zwischen denselben enthaltenen Stücke der Hauptaxe. Eine complexe Variable dagegen kann man, selbst wenn Anfangs- und Endwerth reell sind, aus der Hauptaxe heraustreten, und auf unendlich vielen verschiedenen Linien oder Wegen von einem Puncte zum andern gehen lassen. Wenn Anfangs- und Endwerth, oder nur einer von beiden, complex sind, so gilt natürlich dasselbe; auch dann kann die Variabele beliebige Wege einschlagen, um von dem einen Puncte zum andern zu gelangen.

Zweiter Abschnitt.

Von den Functionen einer complexen Variabelen im Allgemeinen.

---

§ 4.

Indem wir nun zu der Betrachtung von Functionen einer complexen Variablen übergehn, knüpfen wir zwar zunächst an den aus den Elementen bekannten Begriff einer Function von

einer veränderlichen Grösse an, wonach darunter irgend ein Ausdruck verstanden wird, welcher durch mathematische Operationen, die mit der Variablen vorgenommen werden, gebildet ist; werden aber dann diesen Begriff einer Erweiterung zu unterwerfen haben. In früherer Zeit bezeichnete man mit dem Worte: Function einer Grösse, nur das, was wir jetzt eine Potenz nennen. Erst seit *Johann Bernoulli* wurde diese Benennung in der erweiterten Bedeutung angewendet, dass damit nicht bloss die Potenzirung, sondern jede beliebige mathematische Operation oder jede Combination letzterer bezeichnet wird. In neuerer Zeit ist es nun aber nöthig geworden, den Begriff Function auf's Neue zu erweitern und von der Existenz eines mathematischen Ausdrucks für dieselbe zu abstrahiren. Wenn man nämlich eine Variable durch eine andere ausgedrückt hat, sodass die erstere eine Function der letzteren ist, so zeigt sich als das Wesentliche der Verbindung beider, dass jedem Werthe der einen ein Werth (oder auch mehrere Werthe) der andern entspricht. Diese Zusammengehörigkeit der Werthe der Function einerseits und der unabhängigen Variablen andererseits ist es nun, die man vorzugsweise im Auge behält. Sie ist es auch, die überall da hervortritt, wo wir die Abhängigkeit einer Grösse von einer andern erkennen, ohne jedoch im Stande zu sein, das Gesetz dieser Abhängigkeit durch einen mathematischen Ausdruck wiederzugeben. So kennt man, um an ein bekanntes Beispiel zu erinnern, die Abhängigkeit der Spannung des gesättigten Wasserdampfes von seiner Temperatur vollständig in der Weise, dass man nach den Beobachtungen und den danach construirten Tabellen innerhalb gewisser Grenzen für jeden Werth der Temperatur des Dampfes seine Spannung angeben kann. Allein eine aus der Theorie abgeleitete Formel, mittelst welcher man für eine gegebene Temperatur die Spannung berechnen könnte, besitzen wir nicht. Trotz des Fehlens eines solchen mathematischen Ausdrucks ist man aber doch berechtigt, die Spannung als eine Function der Temperatur zu betrachten, weil zu jedem Werthe der letzteren ein Werth der ersteren gehört. Aehnlich verhält es sich mit den algebraischen Functionen im allgemeinen Sinne, d. h. mit den Functionen, welche dadurch entstehen, dass eine Variable mit einer andern durch eine algebraische Gleichung verbunden ist. Man kann die Gleichungen höherer Grade bekanntlich nicht allgemein auflösen, und daher

die eine Variable nicht durch die andre ausdrücken. Da man aber weiss, dass zu jedem Werthe derselben eine bestimmte Anzahl von Werthen der ersteren zugehören, so kann man die erstere als Function der letzteren betrachten. Dazu kommt noch, dass die Functionen, mögen sie mathematisch ausdrückbar sein oder nicht, eine, meistens sehr geringe, Anzahl charakteristischer Eigenschaften besitzen, durch die sie vollständig, oder doch bis auf einen constanten Factor oder eine additive Constante bestimmt sind. Man kann daher dann den Ausdruck der Function durch die charakteristischen Eigenschaften derselben ersetzen.

Denkt man sich nun eine Function innerhalb eines gewissen Intervalles der Werthe der unabhängigen Variablen nur dadurch bestimmt, dass zu jedem Werthe der letzteren der zugehörige Werth der ersteren gegeben oder willkürlich angenommen ist, jedoch so, dass im Allgemeinen stetigen Aenderungen der Variablen auch stetige Aenderungen der Function entsprechen, so tritt ein Unterschied ein, je nachdem der Variablen in dem gegebenen Intervalle nur reelle Werthe zuertheilt, oder auch complexe Werthe mit in den Kreis der Betrachtung gezogen werden. Im ersteren Falle, wenn die Variable nur reelle Werthe annimmt, kann man in der That die Werthe der Function, welche denen der Variablen zugehören sollen, ganz willkürlich wählen, und die einen den andern nach der Stetigkeit entsprechen lassen. Man kann dann auch immer einen für das betreffende Intervall gültigen analytischen Ausdruck für die Function finden, welcher die Werthe der letzteren darstellt; nämlich, wenn dies nicht auf andere Weise möglich sein sollte, so gelingt es doch stets mittelst der Reihen, die nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen eines Bogens fortschreiten. Bekanntlich ist dies sogar dann noch möglich, wenn die Function an einzelnen Stellen Unterbrechungen der Stetigkeit erleidet. Wenn nun aber complexe Werthe der Variablen mit in Betracht kommen, dann steht es nicht mehr frei, eine Reihe stetiger complexer Werthe willkürlich zu wählen und diese als die Werthe einer Function anzusehen, welche einer stetigen Werthenreihe einer complexen Variablen zugehören. Es tritt hier nämlich der besondere Umstand ein, dass wenn auch in einer complexen Variablen $w = u + iv$ die Grössen u und v Functionen von den reellen Bestandtheilen x und y der Variablen $z = x + iy$ sind, doch deswegen w noch nicht eine Function

von z zu sein braucht. Dieser Umstand soll zunächst im folgenden § etwas näher erörtert werden.

§ 5.

Nehmen wir zuerst an, es liege als Function der complexen Variablen $z = x + iy$ ein Ausdruck vor; dann kann dieser wieder auf die Form einer complexen Grösse, also auf die Form

$$w = u + iv$$

gebracht werden, worin u und v reelle Functionen von x und y bedeuten. Allein nun ist nicht auch umgekehrt jeder Ausdruck von der letzteren Form zugleich eine Function von z; denn dazu ist erforderlich, dass in $u + iv$ die reellen Variabeln x und y so enthalten sind, dass sie nur in der bestimmten Verbindung $x + iy$ darin vorkommen. Es leuchtet ein, dass man leicht Functionen von x und y bilden kann, in denen dies nicht der Fall ist, z. B. $x - iy$, $x^2 + y^2$, $2x + iy$. Dies sind wohl Functionen von x und y, aber nicht von $x + iy$; es sind wohl complexe Functionen, aber nicht Functionen einer complexen Variablen, Begriffe, die hiernach wohl unterschieden werden müssen. Demnach entsteht die Aufgabe, zu untersuchen, welchen Bedingungen ein gegebener Ausdruck $w = u + iv$, worin u und v reelle Functionen von x und y bedeuten, genügen muss, damit derselbe eine Function von $z = x + iy$ sei. Um diese Bedingungen zu finden, differentiire man w partiell nach x und y; dann ist, wenn w zunächst Function von z sein soll,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial y},$$

oder da

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = i$$

ist,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial y} = i\,\frac{dw}{dz}.$$

Daher erhält man als nothwendige Bedingung dafür, dass w Function von z sei, die Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\,\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Umgekehrt kann leicht gezeigt werden, dass diese Bedingung auch hinreichend ist, dass nämlich eine Function w von x und y, welche dieser Gleichung genügt, auch immer eine Function von z ist. Substituirt man in dem vollständigen Differential,

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\, dx + \frac{\partial w}{\partial y}\, dy$$

den Werth $i\frac{\partial w}{\partial x}$ statt $\frac{\partial w}{\partial y}$, so erhält man

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,(dx + i\,dy)$$
$$= \frac{\partial w}{\partial x}\, dz.$$

Eliminirt man aber vor der Differentiation mit Hülfe der Gleichung $z = x + iy$ die Variable x aus der Function w, und unterscheidet die nach der Elimination gebildeten partiellen Differentialquotienten nach y und z von den vorigen durch Klammern, so ist

$$dw = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) dz,$$

also wenn man diesen Ausdruck für dw von dem vorigen subtrahirt,

$$0 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right) dz - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) dy.$$

Da nun aber dy und dz ganz von einander unabhängig sind, so muss einzeln

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial w}{\partial x}$$

sein. Daraus folgt, dass w nach der Elimination von x auch die Variable y nicht mehr enthält, sondern eine Function von z allein ist. In der That ist nun $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)$ mit $\frac{dw}{dz}$ gleichbedeutend, also wie oben $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x}$. Demnach ist die obige Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\,\frac{\partial w}{\partial x} \tag{1}$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass w Function von $x + iy$ ist. Hieraus ergeben sich auch Bedingungsgleichungen für die beiden reellen Theile u und v. Substituirt man nämlich $u + iv$ für w, so erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y} = i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

und dann durch Sonderung des Reellen vom Imaginären

(2) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Endlich kann man auch für jede dieser Functionen allein eine Bedingungsgleichung herstellen. Denn differentiirt man die vorigen Gleichungen noch einmal partiell nach x und y und eliminirt einmal v, das andere Mal u, so erhält man

(3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ und } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

sodass keine der beiden Functionen u und v willkürlich ist, sondern jede der nämlichen partiellen Differentialgleichung genügen muss.

§ 6.

Bleiben wir noch bei der Voraussetzung stehen, dass die Function w durch einen Ausdruck gegeben sei, so lässt sich nun aus den Gleichungen (2) noch eine wichtige Folgerung ziehen. Einer Aenderung dz von z entspricht die Aenderung $\frac{dw}{dz}\, dz$ von w. Führt man dann in der derivirten Function $\frac{dw}{dz}$ die Grössen u, v und x, y ein, so erhält man

$$\frac{dw}{dz} = \frac{du + i\,dv}{dx + i\,dy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy\right)}{dx + i\,dy}.$$

Nun kann aber, wenn die Variable z durch einen Punct in der xy-Ebene dargestellt wird, dieser Punct seine Lage in jeder beliebigen Richtung ändern, und das Differential $dz = dx + i\,dy$ stellt die unendlich kleine gerade Linie, die die Ortsveränderung von z angiebt, nach Grösse und Richtung dar. Diese unendlich kleine Gerade kann also von z aus nach jeder beliebigen Richtung gezogen werden. Nun zeigt aber der vorige Ausdruck, dass $\frac{dw}{dz}$ von dz nicht unabhängig ist, sondern seinen Werth mit der Richtung von dz ändert. Um dies noch deutlicher hervortreten zu lassen, wollen wir in dem vorigen Ausdrucke das Differentialverhältniss $\frac{dy}{dx}$ einführen, welches eben die Richtung von dz angiebt. Durch Division mit dx im Zähler und Nenner erhält man dann

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)}{1 + i\frac{dy}{dx}}; \qquad (4)$$

woraus hervorgeht, dass $\frac{dw}{dz}$ seinen Werth in der That mit dem Werthe von $\frac{dy}{dx}$ ändert, wenn zwischen den vier Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ keine Beziehungen stattfinden. Berücksichtigt man nun aber die Gleichungen (2) und eliminirt mit Hülfe derselben z. B. $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$, so erhält man

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(1 + i\frac{dy}{dx}\right)}{1 + i\frac{dy}{dx}} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x};$$

dann also wird $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von $\frac{dy}{dx}$ und daher auch von dz. Wenn also w eine Function der complexen Variablen $z = x + iy$ ist, so ist die Derivirte $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von dz und hat für jede Richtung dieser unendlich kleinen Ortsveränderung denselben Werth. Nennt man die verschiedenen Wege, welche die Variable z bei ihrer Aenderung einschlagen kann, die Arten der Veränderung, so kann man sagen, dass die Derivirte von der Art, in welcher die Variable z sich verändert, unabhängig ist. Bei einer Function von einer reellen Variablen kommt die Veränderung der Variablen selbst nicht in Betracht, weil diese Veränderung eben nur auf eine einzige Art vor sich gehen kann. Bei Functionen einer complexen Variablen dagegen spielt gerade die Verschiedenartigkeit, mit der die Variable sich verändern kann, eine grosse Rolle, und daher ist der gefundene Satz, dass die Derivirte einer Function einer complexen Variablen von der Art der Veränderung der Variablen unabhängig ist, von grosser Wichtigkeit. Auch wird erst dadurch, dass $\frac{dw}{dz}$ von dz vollständig, d. h. sowohl von der Länge als auch von der Richtung dieser unendlich kleinen Geraden unabhängig ist, der Begriff der derivirten Function in der Weise zu einem bestimmten, wie er es bei reellen Variablen ist.

Bis jetzt haben wir angenommen, dass die Function w durch einen mathematischen Ausdruck von z gegeben sei. Lassen wir

nun diese Voraussetzung fallen und nehmen wir vielmehr an, dass innerhalb eines gewissen Gebietes zu jedem Werth der Variablen z der Werth der Function w bekannt sei, welcher sich mit z im Allgemeinen stetig ändere, so werden wir, damit auch die Derivirte der Function w einen bestimmten Sinn habe, noch die Forderung hinzufügen müssen, dass dieselbe von dem Differential dz unabhängig sei. Die Erfüllung dieser Forderung ist dann aber wieder hinreichend, um w als Function von $x + iy$ zu charakterisiren; denn aus ihr folgen wieder unsere früheren Bedingungen (1), (2) oder (3). Soll nämlich der Ausdruck (4) für $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von dz, oder was dasselbe ist, von $\frac{dy}{dx}$ sein, so muss die aus ihm folgende Gleichung

$$\frac{dw}{dz} - \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} + \left(i\frac{dw}{dz} - \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

für jeden Werth von $\frac{dy}{dx}$ erfüllt sein. Demnach erhält man

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}$$
$$i\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y},$$

also, wie oben

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Nach allem diesen hat nun *Riemann* eine Function einer complexen Grösse folgendermassen definirt: „Eine veränderliche complexe Grösse w heisst eine Function einer anderen veränderlichen complexen Grösse z, wenn sie sich mit ihr so ändert, dass der Werth der Derivirten $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von dem Werthe des Differentials dz ist." oder wie es an einer anderen Stelle ausgedrückt ist: „wenn w sich mit $x + iy$ der Gleichung $\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}$ gemäss ändert."

Hiernach lässt sich nun auch leicht beweisen, dass wenn w eine Function von z ist, die Derivirte $\frac{dw}{dz}$ es ebenfalls sein muss. Denn aus den Gleichungen

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y}$$

folgt

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{1}{i}\frac{\partial^2 w}{\partial x.\partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x.\partial y};$$

also ist

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dw}{dz}\right) = i\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dw}{dz}\right),$$

und folglich genügt $\frac{dw}{dz}$ auch der Gleichung (1).

Ist ferner w Function von $z = x + iy$, und z Function von $\zeta = \xi + i\eta$, so ist w auch Function von ζ. Denn es ist, wie oben pag. 27,

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}(dx + i\,dy) = \frac{\partial w}{\partial x}\,dz,$$

und ebenso

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi}(d\xi + i\,d\eta),$$

also

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \xi}(d\xi + i\,d\eta);$$

die partiellen Differentialquotienten von w nach ξ und η sind daher

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = i\,\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \xi},$$

und folglich ist auch

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = i\,\frac{\partial w}{\partial \xi},$$

also w auch Function von $\xi + i\eta$.

§ 7.

Die so eben aufgestellte Bedingung besitzt auch eine bestimmte geometrische Bedeutung, welche noch erörtert werden soll.

Ist wie oben

$$z = x + iy \text{ und } w = u + iv,$$

so sind x und y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punctes z in einer Ebene, und u und v die rechtwinkligen Coordinaten eines Punctes w in derselben oder in einer andern Ebene. Ist nun w eine Function von z, so wird die Lage des Punctes w von der Lage des Punctes z abhängig sein, und beschreibt z eine Curve, so wird w eine von der letzteren abhängige Curve beschreiben; kurz das ganze aus den Puncten w bestehende System

wird in einer bestimmten Abhängigkeit von dem aus den Puncten z gebildeten Systeme stehn, wenn w eine bestimmte Function von z ist. *Riemann* nennt alsdann das System der Puncte w die Abbildung des Systemes der Puncte z. In Folge der obigen Bedingung stehen nun die beiden Figuren-Systeme in einer ganz bestimmten Beziehung, welche bei jeder Function stattfindet.

Es seien z' und z'' (Fig. 6) zwei unendlich nahe an einem dritten Puncte z gelegene Puncte, und man setze die nach verschiedenen Richtungen laufenden unendlich kleinen Verbindungslinien

Fig. 6.

$$\overline{zz'} = dz' \quad , \quad \overline{zz''} = dz''.$$

Ferner seien w, w', w'' die den Puncten z, z', z'' entsprechenden Puncte, und die ebenfalls unendlich kleinen Verbindungslinien

$$\overline{ww'} = dw' \quad , \quad \overline{ww''} = dw''.\text{*)}$$

Soll nun $\frac{dw}{dz}$ für jede Richtung von dz denselben Werth haben, so muss

$$\frac{dw'}{dz'} = \frac{dw''}{dz''} \text{ oder } \frac{dw'}{dw''} = \frac{dz'}{dz''}$$

sein. Nun kann man aber die Differentiale durch die Differenzen der unendlich nahen Puncte ersetzen, also schreiben

$$dz' = z' - z \qquad dw' = w' - w$$
$$dz'' = z'' - z \qquad dw'' = w'' - w,$$

dann hat man

$$\frac{w' - w}{w'' - w} = \frac{z' - z}{z'' - z},$$

und folglich sind nach § 2 die Dreiecke $z'\,z\,z''$ und $w'\,w\,w''$ einander ähnlich, nämlich die Winkel $z'\,z\,z''$ und $w'\,w\,w''$ einander gleich, und die sie einschliessenden Seiten proportional. Da nun dies für jedes Paar entsprechender Puncte z und w stattfinden muss, so ist die von dem Puncte w beschriebene Figur der von dem Puncte z beschriebenen in den unendlich klei-

*) Man bemerke, dass wenn auch $\frac{dw}{dz}$ von dz unabhängig ist, doch dw, welches $= \frac{dw}{dz}\,dz$ ist, seine Richtung und Grösse mit dz im Allgemeinen ändert.

nen Theilen ähnlich, und zwei sich schneidende Curven in der Ebene der w bilden mit einander denselben Winkel, wie die entsprechenden Curven in der Ebene der z. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass hierbei vorausgesetzt wird, dass $\frac{dw}{dz}$ weder Null noch unendlich sei. Wir werden später sehen, dass in diesen Fällen eine Ausnahme eintritt.*) *Siebeck* nennt die Abhängigkeit, in welcher das System der w von dem der z steht, Verwandtschaft, und zwar wegen der Eigenschaft, dass je zwei Paare von entsprechenden Curven unter sich gleiche Winkel einschliessen, isogonale Verwandtschaft. Von diesen isogonalen Verwandtschaften sind bis jetzt erst zwei in Bezug auf ihre allgemeinen Eigenschaften näher untersucht worden, nämlich die Verwandtschaft der Aehnlichkeit und die Kreisverwandtschaft, welche letztere von *Möbius* in die neuere Geometrie eingeführt worden ist.

Als Beispiel diene die einfache Function

$$w = z^2.$$

Wir erhalten hier

$$w = x^2 - y^2 + 2ixy$$

und daher

$$u = x^2 - y^2 \qquad v = 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

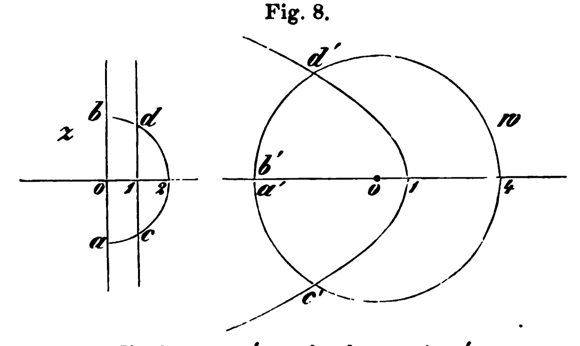
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

wodurch die Bedingungsgleichungen (2) verificirt sind. Lässt man nun z. B. z die y-Axe beschreiben, sodass $x = 0$ ist, so hat man $z = iy$ und $w = -y^2$; daher beschreibt w den negativen Theil der Hauptaxe und zwar nur diesen, sodass, wenn z von a über o nach b geht, w sich von a' nach o und dann wieder zurück nach b' bewegt, wo a' und b' zusammenfallen, wenn $\overline{ao} = \overline{ob}$ angenommen wird (Fig. 8). Lässt man ferner z einen Kreis um den Nullpunct mit dem Radius r beschreiben, sodass, wenn man $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ setzt, r constant bleibt, so ist $w = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$, also beschreibt auch w einen Kreis um den Nullpunct mit dem Radius r^2. Da aber dem Winkel φ von z der Winkel 2φ von w entspricht, so durchläuft w seinen Kreis

*) Vgl. § 40.

doppelt so rasch als z. Beschreibt z. B. z von a aus einen Halbkreis in der Richtung der wachsenden Winkel nach b, so beschreibt

Fig. 8.



w einen ganzen Kreis von a' nach dem mit a' zusammenfallenden Puncte b'. Der Winkel aber, den die Gerade und der Kreis in z und in w mit einander bilden, ist bei beiden ein Rechter. Lässt man z eine durch den Punct 1 gehende mit der y-Axe parallele Gerade cd beschreiben, so beschreibt w eine Parabel. Dies ergiebt sich einfach so, dass man, weil in diesem Falle x constant $= 1$ ist, in den Gleichungen $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, $x = 1$ setzt und y eliminirt; dadurch erhält man zwischen den Coordinaten u und v des Punctes w die Gleichung $v^2 = 4\,(1 - u)$, welche zeigt, dass w eine Parabel beschreibt, welche ihren Scheitel in 1, ihren Brennpunct in o hat, und für welche der Parameter, die Ordinate im Brennpuncte, $= 2$ ist. Durch Untersuchung der Tangenten in den Durchschnittspuncten c' und d', welche c und d entsprechen, liesse sich wieder leicht verificiren, dass die Parabel den Kreis in w unter denselben Winkeln schneidet, wie die Gerade cd den Kreis in z. Um endlich auch einen der Ausnahmefälle durch ein Beispiel zu erläutern, beschreibe noch z die Hauptaxe; dann bleibt z reell, also w positiv, und folglich beschreibt w den positiven Theil der Hauptaxe. Dieser aber bildet mit dem negativen Theile, welcher der y-Axe in z entsprach, einen Winkel von 180^0, während die x- und y-Axe in z einen Winkel von 90^0 mit einander bilden. In der Nähe des Nullpunctes findet also nicht Aehnlichkeit in den unendlich kleinen Theilen statt, und in der That erhält in diesem Puncte die Derivirte $\frac{dw}{dz} = 2z$ den Werth Null.

Dritter Abschnitt.

Mehrdeutige Functionen.

§ 8.

Die Einführung complexer Variablen wirft auch ein helles Licht auf die Natur der mehrdeutigen Functionen. Da nämlich eine complexe Variable beim Uebergange von einem Anfangspuncte z_0 zu einem andern Puncte z_1 sehr verschiedene Wege einschlagen kann, so liegt es nahe, sich die Frage zu stellen, ob nicht der durchlaufene Weg von Einfluss sein kann auf den Werth w_1, den eine Function, die mit einem bestimmten Werthe w_0 aus z_0 ausgeht, im Endpuncte z_1 erlangt; sich zu fragen, ob die von w beschriebenen, von w_0 ausgehenden Curven, welche den zwischen z_0 und z_1 beschriebenen entsprechen, immer in demselben Puncte w_1 endigen müssen, oder ob sie auch in verschiedenen Puncten endigen können. Nun ist zuerst klar, dass bei eindeutigen Functionen der Endwerth w_1 von dem Wege unabhängig sein muss, denn sonst müsste die Function für einen und denselben Werth von z mehrere Werthe annehmen können, was bei einer eindeutigen Function nicht der Fall ist. Allein bei den mehrdeutigen Functionen fällt dieser Grund fort. Bei einer solchen hat in der That die Function für denselben Werth von z mehrere Werthe, und daher ist von vornherein die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass verschiedene Wege auch zu verschiedenen Puncten oder Functionswerthen führen können. Lässt man z. B. in $w = \sqrt{z}$ die Variable z von 1 nach 4 auf verschiedenen Wegen gehn, und geht man mit der Function w für $z = 1$ mit $w = +1$ aus, so liegt die Möglichkeit vor, dass einige Wege von $w = +1$ nach $w = +2$, andere dagegen von $w = +1$ nach $w = -2$ führen können.

Es sind nun hier vor allen Dingen solche Puncte ins Auge zu fassen, in welchen zwei oder mehrere Werthe der Function w, die im Allgemeinen verschieden sind, einander gleich werden.

Ein solcher ist z. B. für $w = \sqrt{z}$ der Punct $z = 0$, in diesem werden die im Allgemeinen mit verschiedenen Vorzeichen behafteten Werthe von w einander gleich, nämlich beide $= 0$. Betrachten wir ferner die durch die cubische Gleichung

$$w^3 - w + z = 0$$

definirte Function, so liefert hier die Cardanische Formel, wenn der Kürze wegen

$$p = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(-z + \sqrt{z^2 - \tfrac{4}{27}})},\quad q = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(-z - \sqrt{z^2 - \tfrac{4}{27}})},$$

und die beiden imaginären Cubikwurzeln der Einheit

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \alpha,\quad \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \alpha^2$$

gesetzt werden, folgende Ausdrücke für die drei Wurzeln der obigen Gleichung, welche mit w_1, w_2, w_3 bezeichnet werden mögen:

$$w_1 = p + q$$
$$w_2 = \alpha p + \alpha^2 q$$
$$w_3 = \alpha^2 p + \alpha q.$$

Für jeden Werth von z hat hier im Allgemeinen w die drei Werthe w_1, w_2, w_3. Von diesen werden aber die beiden letzten einander gleich, wenn $p = q$ ist, was eintritt, wenn

$$z = +\frac{2}{\sqrt{27}} \text{ oder } z = -\frac{2}{\sqrt{27}}$$

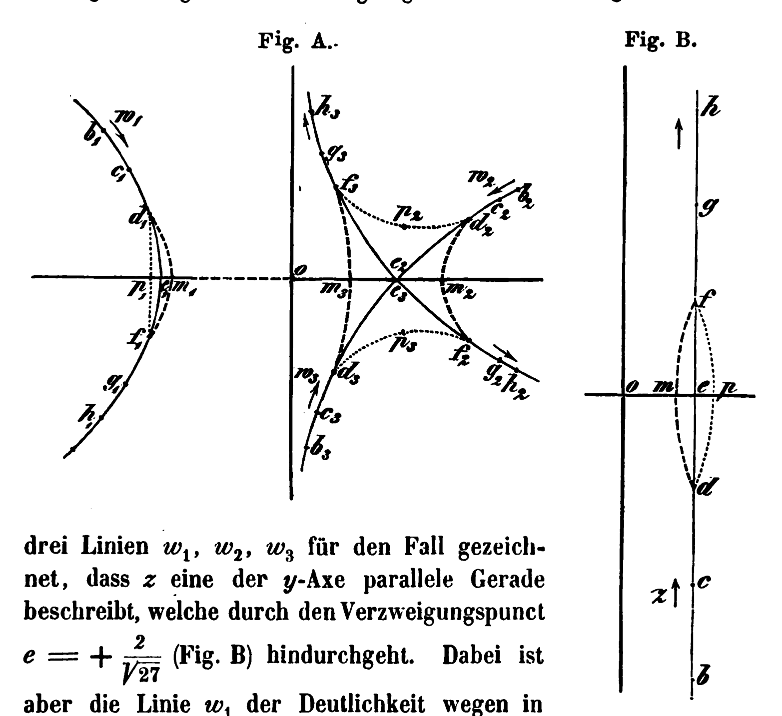
ist. In diesen Puncten wird resp.

$$w_2 = w_3 = +\sqrt{\tfrac{1}{3}} \text{ oder } w_2 = w_3 = -\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Nehmen wir nun an, indem wir an dieses Beispiel die ferneren Betrachtungen anknüpfen, die Variable z verändere sich stetig, oder der sie darstellende Punct beschreibe eine Linie, so werden die drei Grössen w_1, w_2, w_3 sich ebenfalls, jede für sich, stetig ändern, oder die drei entsprechenden Puncte werden drei abgesondert verlaufende Linien beschreiben. Wenn aber z durch einen der beiden oben bestimmten Puncte hindurchgeht, z. B. durch den Punct $z = +\frac{2}{\sqrt{27}}$, so nehmen beide Grössen w_2 und w_3 den Werth $+\sqrt{\tfrac{1}{3}}$ an; die beiden von w_2 und w_3 beschriebenen Linien werden daher in dem Puncte $+\sqrt{\tfrac{1}{3}}$ zusammentreffen. Beim Ueberschreiten dieses Punctes kann demnach ohne Unterbrechung der Stetigkeit w_2 in w_3 und w_3 in w_2 übergehn, ja es bleibt vollständig willkürlich, auf welcher der beiden Linien man jede der beiden Grössen w_2 und w_3 ihren Weg fortsetzen

lassen will. Es findet an dieser Stelle gleichsam eine Verzweigung der Linien statt, welche von den Grössen w_2 und w_3 beschrieben werden; daher hat *Riemann* die Puncte der z-Ebene, bei welchen ein Functionswerth in einen anderen übergehn kann, Verzweigungspuncte genannt. In unserem Beispiele sind hiernach die Puncte $z = +\frac{2}{\sqrt{27}}$ und $z = -\frac{2}{\sqrt{27}}$ Verzweigungspuncte (nicht etwa $w = +\sqrt{\frac{1}{3}}$ oder $w = -\sqrt{\frac{1}{3}}$). Zur Erläuterung ist Fig. A und B beigefügt worden. In Fig. A sind die

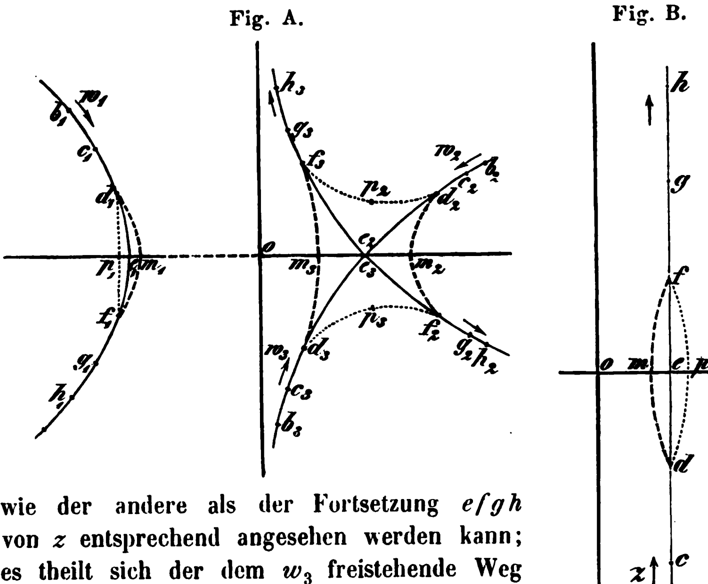
Fig. A. Fig. B.



drei Linien w_1, w_2, w_3 für den Fall gezeichnet, dass z eine der y-Axe parallele Gerade beschreibt, welche durch den Verzweigungspunct $e = +\frac{2}{\sqrt{27}}$ (Fig. B) hindurchgeht. Dabei ist aber die Linie w_1 der Deutlichkeit wegen in doppelt so grossem Massstabe, als die übrigen Linien, dargestellt und, um Raum zu sparen, näher an die Ordinatenaxe herangerückt, als sie eigentlich verläuft. Die Puncte w, welche den Puncten z entsprechen, sind mit den nämlichen Buchstaben und hinzugefügten Indices 1, 2, 3 bezeichnet. Das Bild der Verzweigung tritt nun noch deutlicher hervor, wenn man nur eine der Grössen z. B. w_3 verfolgt. Diese beschreibt die Linie $b_3\,c_3\,d_3$, welche sich dem Puncte $e_3 = e_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ nähert, wenn z auf der Linie

bcd an den Punct $c = \frac{2}{\sqrt{27}}$ heran geht; überschreitet nun z diesen Punct, so gehen für w_3 zwei Wege von $e_2 = e_3 = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$ aus, nämlich $e_3 f_3 g_3 h_3$ und $e_2 f_2 g_2 h_2$, von denen der eine eben so gut

Fig. A. Fig. B.



wie der andere als der Fortsetzung $efgh$ von z entsprechend angesehen werden kann; es theilt sich der dem w_3 freistehende Weg bei $e_2 = e_3$ wirklich in zwei Zweige. Wenn nun z von b nach h durch den Verzweigungspunct e geht, so kann w_3 von b_3 ebensowohl nach h_3 wie nach h_2 gelangen, und ebenso w_2 von b_2 aus; bei einem solchen durch einen Verzweigungspunct hindurchführenden Wege bleibt also der Endwerth der Function unbestimmt. Wenn dagegen z von b nach h einen Weg beschreibt, der nicht durch einen Verzweigungspunct hindurch führt, so kann zwar je nach der Beschaffenheit dieses Weges der Endwerth der Function ein verschiedener sein, er ist aber für jeden bestimmten Weg des z immer ein ganz bestimmter. Auch dies erläutern die Figuren A und B. Geht nämlich z von b über d, und dann längs der gestrichelten Linie über m nach f und h, so geht w_3 von b_3 über d_3 und dann längs der ebenso bezeichneten Linie über m_3 nach f_3 und h_3; w_2 von b_2 über d_2, m_2, f_2 nach h_2; w_3 erlangt dann den bestimmten Werth h_3 und w_2 den bestimmten Werth h_2. Diese Endwerthe werden andre, aber wiederum bestimmte, wenn z den Verzweigungspunct e auf

der anderen Seite längs der punctirten Linie über p umgeht. In diesem Falle geht w_3 von b_3 über d_3 und dann längs der punctirten Linie über p_3 nach f_2 und h_2; und w_2 geht über d_2, p_2, f_3 nach h_3. In diesem Falle sind zwar die Fortschreitungen der Functionen und daher auch ihre Endwerthe andere als vorhin, aber wiederum ganz bestimmte. — Im Allgemeinen sind nun solche Puncte der z-Ebene, in welchen mehrere sonst verschiedene Werthe einer Function einander gleich werden, in der Regel auch Verzweigungspuncte der Function. Von einer Ausnahme hiervon soll sogleich die Rede sein.

Eine ähnliche Verzweigung der Function findet für solche Puncte statt, in denen w unendlich gross wird und dadurch eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet. Dies ist z. B. bei der durch die Gleichung

$$(z-b)\,(w-c)^3 = z-a \text{ oder } w = c + \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}}$$

bestimmten Function der Fall, in welcher a, b, c drei complexe Constanten, also drei feste Puncte bedeuten. Hier ist $z = a$ ein Verzweigungspunct, in welchem drei Werthe der Function in dem einen $w = c$ zusammenfallen. Ausserdem aber werden für $z = b$ alle drei Werthe von w unendlich gross. Hier erleiden die drei Functionen eine Unterbrechung der Stetigkeit und daher kann es wieder unentschieden bleiben, auf welchem Wege jede fortzusetzen ist, weil wenn die Function einen Sprung macht, sie eben so wohl nach der einen, wie nach einer anderen Fortsetzung ihres Weges überspringen kann. Daher ist $z = b$ ebenfalls ein Verzweigungspunct. Man bemerke dabei, dass wenn w für einen Werth von z unendlich gross wird, $\frac{1}{w}$ an dieser Stelle den Werth Null hat. Für die letztere Function fallen daher an dieser Stelle mehrere Functionswerthe zusammen; also wird hier in der Regel eine Verzweigung der Function $\frac{1}{w}$ statt finden; das nämliche gilt dann auch von w. Diejenigen Puncte, in denen w unendlich gross oder unstetig ist, sind daher in der Regel ebenfalls Verzweigungspuncte.

Es kann hiervon aber auch Ausnahmen geben: es giebt Fälle, bei welchen Puncte, in denen Functionswerthe einander gleich oder unendlich gross werden, doch keine Verzweigungs-

puncte sind. Dies kann für jetzt nur erst an einem Beispiele erläutert werden. In den Functionen

$$\sqrt{1-z^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

sind $z = +1$ und $z = -1$ Verzweigungspuncte; dagegen in

$$(z-a)\sqrt{z} \quad \text{und} \quad \frac{1}{(z-a)\sqrt{z}}$$

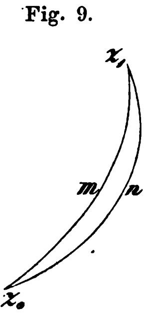
ist $z = a$ **kein** Verzweigungspunct, obgleich die Functionswerthe an dieser Stelle im ersten Falle beide gleich Null und im zweiten beide unendlich gross sind. Wenn nämlich z den Punct a überschreitet, so hat sowohl $z - a$ als auch $\sqrt{z}$ eine ganz bestimmte stetige Fortschreitung: $z - a$, weil es überhaupt eindeutig ist, und $\sqrt{z}$, weil $+\sqrt{a}$ ohne Unterbrechung der Stetigkeit nicht plötzlich nach $-\sqrt{a}$ überspringen kann. Daher haben auch die aus diesen Grössen auf rationale Weise zusammengesetzten Functionen an dieser Stelle für jede von z beschriebene Linie eine bestimmte Fortschreitung, und es findet keine Verzweigung statt. Die Verzweigungspuncte sind demnach zwar nur unter denjenigen Puncten zu suchen, in welchen entweder eine Unterbrechung der Stetigkeit eintritt, oder mehrere Functionswerthe zusammenfallen; aber ob solche Puncte wirklich Verzweigungspuncte sind, muss noch besonders entschieden werden.

§ 9.

Die vorigen Betrachtungen haben gezeigt, dass wenn die Variable z von einem beliebigen Puncte z_0 ausgehend nach einem andern Puncte z_1 hin einen Weg beschreibt, welcher durch einen Verzweigungspunct einer Function w hindurchführt, dieselbe in z_1 verschiedene Werthe erhält, je nachdem man sie auf dem einen oder dem andern ihrer Zweige weiter gehen lässt. Bei einem solchen Wege des z ist also der Werth des w in z_1 unbestimmt. Auf jedem andern Wege dagegen, der nicht durch einen Verzweigungspunct hindurch führt, erhält w in z_1 einen bestimmten Werth, und wir wollen nun zeigen, dass zwei Wege, die beide von z_0 nach z_1 führen, dem w in z_1 **nur dann verschiedene Werthe zuertheilen, wenn sie einen Verzweigungspunct einschliessen.** Dazu beweisen wir zuerst folgenden Satz:

Lässt man die Variable z zwei unendlich nahe liegende Wege $z_0 m z_1$ und $z_0 n z_1$ (Fig. 9) von z_0 nach z_1 beschreiben, welche an keiner Stelle einem Puncte unendlich nahe kommen, in dem entweder die Function w unstetig wird, oder in welchem mehrere Functionswerthe zusammenfallen, so erhält die Function w, wenn sie aus z_0 mit dem nämlichen Werthe ausgeht, auf beiden Wegen in z_1 den nämlichen Werth.

Fig. 9.



Um diesen Satz zu beweisen, bemerke man zuerst, dass die verschiedenen Werthe, welche eine mehrdeutige Function in einem und demselben Puncte z hat, nur dann um eine unendlich kleine Grösse von einander verschieden sein können, wenn der Punct z einem solchen Puncte unendlich nahe liegt, in dem mehrere Functionswerthe zusammenfallen. Denn nur für solche Puncte z nähern sich die von den Functionswerthen beschriebenen Linien, während sie für alle anderen Puncte z in endlichen Entfernungen von einander verlaufen. (Vgl. hierzu Fig. A. und B. S. 38). Da nun die beiden Wege $z_0 m z_1$ und $z_0 n z_1$ der Voraussetzung gemäss sich nirgend einem solchen Puncte nähern, so sind die verschiedenen Werthe, die w in irgend einem Puncte der beiden Wege haben kann, um endliche Grössen von einander verschieden. Folglich können auch die Werthe, welche die Function w auf den beiden Wegen $z_0 m z_1$ und $z_0 n z_1$ in z_1 erlangt, nur entweder einander gleich oder um eine endliche Grösse von einander verschieden sein. Nun kann aber die letztere Alternative nicht Statt haben. Denkt man sich nämlich, dass zwei bewegliche Puncte z die beiden unendlich nahen Wege $z_0 m z_1$ und $z_0 n z_1$ in der Art durchlaufen, dass sie stets einander unendlich nahe bleiben, und bezeichnet man die Functionswerthe auf der einen Linie mit w_m und auf der anderen mit w_n, so können w_m und w_n längs beider Linien nur um eine unendlich kleine Grösse von einander verschieden sein, da der Voraussetzung nach w bei beiden Wegen aus z_0 mit dem nämlichen Werthe ausgeht, und beim Uebergang von einem Puncte der einen Linie zu einem unendlich nahen Puncte der anderen Linie Stetigkeit stattfindet. Wenn nun w_m und w_n in z_1 um eine

endliche Grösse verschieden wären, so müsste mindestens eine dieser Functionen an irgend einer Stelle einen Sprung machen, was durch die Voraussetzung ausgeschlossen wird, dass die beiden Wege $z_0 m z_1$ und $z_0 n z_1$ sich keinem Puncte nähern sollen, in welchem eine Unterbrechung der Stetigkeit eintritt. Demnach können w_m und w_n in z_1 nicht um eine endliche Grösse von einander verschieden sein, und folglich sind sie einander gleich.

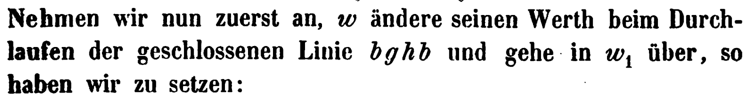
Denkt man sich nun, nachdem dies festgestellt ist, eine Reihe auf einander folgender und unendlich nahe an einander liegender Wege, alle zwischen den Puncten z_0 und z_1, und so beschaffen, dass keiner derselben sich einem Puncte nähert, in dem entweder Unstetigkeit eintritt, oder Functionswerthe zusammenfallen, so erhält die Function auf allen diesen Wegen den nämlichen Werth in z_1. Daraus folgt dann: Wenn man einen Weg zwischen zwei Puncten z_0 und z_1 so durch allmälige Uebergänge in einen andern Weg umformen kann, dass dabei keiner der so eben charakterisirten Puncte überschritten wird, so erhält die Function in z_1 auf dem zweiten Wege denselben Werth wie auf dem ersten. Lässt man nun die Variable z von z_0 ausgehend eine geschlossene Linie beschreiben und wieder nach z_0 zurückkehren, so erhält die Function, wenn die Variable die geschlossene Linie durchlaufen hat und. zum zweiten Male nach z_0 kommt, hier denselben Werth, den sie beim Ausgange hatte, wenn die geschlossene Linie keinen Punct umgiebt, in welchem entweder Unstetigkeit eintritt oder Functionswerthe zusammenfallen.

Solche geschlossene Linien, die von der Variablen z beschrieben werden, sind nun für die Untersuchung des Einflusses, den der Weg, auf welchem die Variable z nach irgend einem Puncte hingeht, auf den Werth ausübt, welchen die Function w in diesem Puncte erlangt, maassgebend. Umgiebt eine geschlossene Linie keinen der schon so oft erwähnten Puncte, so ändert, wie gezeigt worden ist, die Function ihren Werth nicht; umgiebt sie aber einen solchen Punct, so kann die Function ihren Werth ändern, oder auch nicht ändern. Werden ferner von der Variablen zwischen zwei Puncten zwei Wege durchlaufen, die keinen derartigen Punct einschliessen, so führen diese zu gleichen Functionswerthen. Wir haben daher nur Wege zu betrachten, die einen solchen Punct einschliessen. Sei nun a (Fig. 10) ein Punct von dieser Art, und nehmen wir zwei Wege bdc und bec

an, welche a, aber keinen andern ähnlichen Punct einschliessen. Aus b gehe w mit dem Werthe w_0 aus und erlange auf dem Wege bdc in c den Werth w_0'. Lässt man dann aber die Variable z, ehe sie den andern Weg bec betritt, zuvor eine den Punct a umgebende geschlossene Linie $bghb$ durchlaufen, so kann der Weg $bghbec$ in bdc umgeformt werden, ohne dass der Punct a überschritten wird, folglich erlangt w auf diesem Wege in c ebenfalls den Werth w_0', wenn es aus b mit dem Werthe w_0 ausgeht. Wir haben also Folgendes:

Fig. 10.

auf bdc geht w von w_0 nach w_0'
„ $bghbec$ „ w „ w_0 „ w_0'.



Nehmen wir nun zuerst an, w ändere seinen Werth beim Durchlaufen der geschlossenen Linie $bghb$ und gehe in w_1 über, so haben wir zu setzen:

auf $bghb$ geht w von w_0 nach w_1

und daher

auf bec „ w „ w_1 „ w_0'.

Demnach erlangt w auf bec in c den Werth w_0' dann, wenn es aus b mit dem Werthe w_1 ausgeht; lässt man es also aus b mit dem Werthe w_0 ausgehn, so kann es den Werth w_0' nicht erlangen, sondern muss zu einem andern Werthe geführt werden. Wenn dagegen w auf der geschlossenen Linie $bghb$ seinen Werth nicht ändert, so haben wir zu setzen:

auf $bghb$ geht w von w_0 nach w_0
„ bec „ w „ w_0 „ w_0';

dann erlangt also w, aus b mit dem Werthe w_0 ausgehend, auch auf dem Wege bec den Werth w_0'.

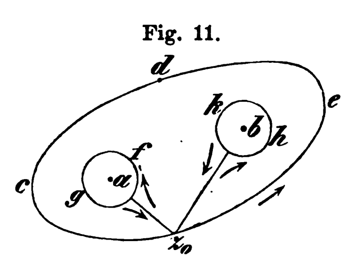
Hieraus folgt also, wenn zwei Wege einen unserer in Rede stehenden Puncte a einschliessen, so führen sie zu verschiedenen oder gleichen Functionswerthen, je nachdem die Function w beim Durchlaufen einer den Punct a umgebenden geschlossenen Linie ihren Werth ändert oder nicht ändert.

Jetzt sind wir im Stande, die Verzweigungspuncte näher festzustellen. Es soll nämlich ein Punct a, in welchem entweder eine Unstetigkeit eintritt oder mehrere Functionswerthe zusammenfallen, *dann und nur dann ein Verzweigungspunct genannt werden, wenn die Function beim Umlaufe um*

eine diesen Punct und keinen andern ähnlichen umgebende geschlossene Linie ihren Werth ändert. Hiermit ist denn der im Eingange dieses Paragraphen ausgesprochene Satz dargethan, dass zwei verschiedene, dieselben Puncte verbindende Wege dann und nur dann einer Function, die vom Ausgangspuncte mit demselben Werthe ausgeht, verschiedene Werthe zuertheilen, wenn sie einen Verzweigungspunct einschliessen; und für geschlossene Linien können wir den Satz aussprechen: Eine mehrdeutige Function geht von einem in einem Puncte z_0 stattfindenden Werthe zu einem anderen in demselben Puncte stattfindenden Werthe dadurch auf stetige Weise über, dass die Variable z von z_0 aus eine geschlossene Linie beschreibt, welche einen Verzweigungspunct umgiebt.

Geschlossene Linien, welche zwei oder mehrere Verzweigungspuncte umgeben, können ebenfalls auf solche geschlossene Linien zurückgeführt werden, welche nur einen Verzweigungspunct enthalten. Denn zieht man von einem Puncte z_0 aus um jeden Verzweigungspunct eine geschlossene Linie und lässt die Variable dieselben eine nach der anderen durchlaufen, so kann dieser Weg, ohne dass einer der Verzweigungspuncte überschritten wird, in eine geschlossene Linie umgeformt werden, die von z_0 aus alle Verzweigungspuncte umgiebt. (Fig. 11, wo a und b zwei Verzweigungspuncte bedeuten.) Man stellt solche geschlossene Linien um die einzelnen Verzweigungspuncte am einfachsten dadurch her, dass man um jeden einen kleinen Kreis beschreibt und jeden dieser Kreise mit z_0 durch eine Linie verbindet, die dann doppelt, hin und wieder zurück, durchlaufen werden muss.

Fig. 11.



§ 10.

Es sollen nun die vorigen Betrachtungen an einigen Beispielen erläutert, und daran zugleich gezeigt werden, in welcher Weise die Functionswerthe beim Durchlaufen geschlossener, einen Verzweigungspunct umgebender Linien in einander übergehen.

Erstes Beispiel.

$$w = \sqrt{z}.$$

Hier ist $z = 0$ ein Verzweigungspunct. Lässt man die Veränderliche von dem Puncte $z = 1$ ausgehen und die Peripherie eines aus dem Nullpuncte beschriebenen Kreises durchlaufen, so ist dies eine geschlossene Linie, welche den Verzweigungspunct umgiebt. Geht nun die Function $w = \sqrt{z}$ von dem Puncte $z = 1$ mit dem Werthe $w = +1$ aus, und setzt man

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

so ist zuerst im Puncte $z = 1$, $r = 1$ und $\varphi = 0$. Durchläuft dann z die Peripherie des Kreises in der Richtung der wachsenden Winkel, so bleibt r constant $= 1$, und φ nimmt von 0 bis 2π zu. Kommt also die Veränderliche wieder nach dem Puncte $z = 1$ zurück, so ist jetzt

$$z = \cos 2\pi + i \sin 2\pi$$

und folglich

$$w = \sqrt{z} = \cos\pi + i \sin\pi = -1;$$

die Function hat also jetzt im Puncte $z = 1$ nicht wieder den ursprünglichen Werth $+1$, sondern den andern Werth -1 erhalten. Ganz dasselbe tritt auch ein, wenn die Variable irgend eine andere geschlossene, den Nullpunct einmal umgebende Linie von $z = 1$ aus beschreibt; denn dieser Weg kann durch allmälige Aenderungen in den Kreis übergeführt werden, ohne dass dabei der Nullpunct überschritten wird. Geht überhaupt w mit dem Werthe w_0 von irgend einem Puncte z_0 aus, für welchen

$$z_0 = r_0(\cos\varphi_0 + i \sin\varphi_0)$$

also

$$w_0 = r_0^{\frac{1}{2}}(\cos\tfrac{1}{2}\varphi_0 + i \sin\tfrac{1}{2}\varphi_0)$$

ist, und beschreibt z eine geschlossene Linie, welche den Nullpunct einmal in der Richtung der wachsenden Winkel umwindet, so ist bei der Rückkunft noch z_0

$$z = r_0(\cos(\varphi_0 + 2\pi) + i \sin(\varphi_0 + 2\pi))$$

geworden; mithin ist dann

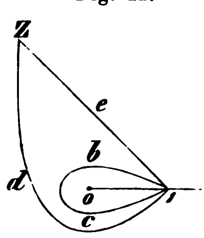
$$\begin{aligned} w &= r_0^{\frac{1}{2}}(\cos(\tfrac{1}{2}\varphi_0 + \pi) + i \sin(\tfrac{1}{2}\varphi_0 + \pi)) \\ &= -w_0. \end{aligned}$$

Wird die geschlossene Linie zweimal von der Variablen durchlaufen, oder beschreibt letztere eine andere geschlossene Linie, welche den Nullpunct zweimal umwindet, so wächst das Argument von

z um 4π, also das von w um 2π, und folglich erhält dann die Function ihren ursprünglichen Werth wieder.

Man lasse nun die Variable von dem Puncte $z = 1$ nach einem beliebigen Puncte Z gehen, und zwar zuerst auf einer Linie $1eZ$ (Fig. 12), welche den Nullpunct nicht umwindet, und auf welcher die Winkel φ wachsen. Auf diesem Wege mögen r und φ in Z die Werthe R und ϑ, und w den Werth W erreichen, sodass

Fig. 12.



$$W = R^{\frac{1}{2}} (\cos \tfrac{1}{2} \vartheta + i \sin \tfrac{1}{2} \vartheta)$$

ist. Geht man dann aber auf der andern Seite des Nullpuncts von 1 nach Z auf einer den Nullpunct nicht umwindenden Linie $1dZ$, so nimmt der Winkel φ ab und erreicht in Z den Werth $\vartheta - 2\pi$. Daher wird jetzt in Z

$$z = R (\cos (2\pi - \vartheta) - i \sin (2\pi - \vartheta))$$

und

$$w = R^{\frac{1}{2}} (\cos (\pi - \tfrac{1}{2} \vartheta) - i \sin (\pi - \tfrac{1}{2} \vartheta))$$

d. h.

$$w = - W.$$

Lässt man endlich z zuerst von 1 aus eine geschlossene Linie $1bc1$ um den Nullpunct und dann die Linie $1dZ$ beschreiben, so wächst φ zuerst von 0 bis 2π und nimmt dann um den Winkel $2\pi - \vartheta$ ab, so dass dann φ in Z den Werth $2\pi + \vartheta - 2\pi = \vartheta$ erhält; in diesem Falle geht also w nach dem Durchlaufen der Linie $1bc1$ von 1 mit dem Werthe -1 aus und erlangt auf $1dZ$ in Z den Werth $+W$.

Zweites Beispiel. In der Function

$$w = (z - 1) \sqrt{z}$$

ist zuerst $z = 0$ ein Verzweigungspunct, und es verhält sich diese Function in Beziehung auf diesen Punct ähnlich wie die vorige. Betrachten wir daher den Punct $z = 1$, für welchen ebenfalls $w = 0$ wird. Die Variable z beschreibe um ihn einen Kreis mit dem Radius r, von dem Puncte $a = 1 + r$ der Hauptaxe (Fig. 13) ausgehend. Setzt man

$$z - 1 = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

so wird

$$w = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \sqrt{1 + r \cos \varphi + i r \sin \varphi}.$$

Da nun r constant bleibt, und φ von 0 bis 2π wächst, so ändert der Factor $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ seinen Werth nicht. Um das Verhalten des zweiten Factors zu untersuchen, sei

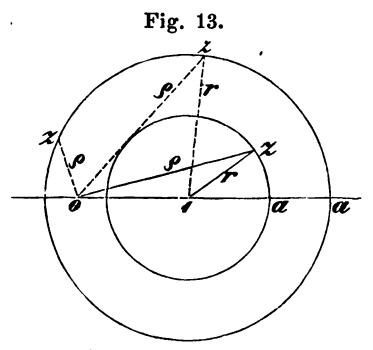
$$1 + r\cos\varphi = \varrho\cos\psi \qquad r\sin\varphi = \varrho\sin\psi;$$

dann bedeutet ϱ die Gerade $\overline{oz}$, und ψ die Neigung derselben gegen die Hauptaxe, und es wird

$$w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,\varrho^{\frac{1}{2}}(\cos\tfrac{1}{2}\psi + i\sin\tfrac{1}{2}\psi).$$

Umgiebt nun der Kreis den Nullpunct nicht, so durchläuft ψ von 0 an eine Reihe von Werthen, welche wieder mit dem Werthe 0 endigen, daher ändert w seinen Werth nicht. Ist aber der Kreis so gross, dass der Nullpunct, welcher ein Verzweigungspunct ist, ebenfalls innerhalb desselben liegt, so wächst ψ von 0 bis 2π, und dann geht also der ursprüngliche Werth $w = r\varrho^{\frac{1}{2}}$ in $-r\varrho^{\frac{1}{2}}$ über. Es bestätigt sich also, dass nur der Punct $z = 0$ ein Verzweigungspunct ist, der Punct $z = 1$ aber nicht.

Fig. 13.



Man kann die gegebene Function $(z-1)\sqrt{z}$ als aus der folgenden

$$w' = \sqrt{(z-1)(z-b)\,z}$$

entstanden betrachten dadurch, dass b gleich 1 geworden ist. Eine den Punct $z = 1$ umgebende Linie kann dann betrachtet werden als eine Linie, welche die beiden Puncte $z = 1$ und $z = b$ zugleich umgab, und bei welcher dann diese beiden Puncte zusammengefallen sind. Nun sind für die Function w' sowohl $z = 0$, als auch $z = 1$ und $z = b$ Verzweigungspuncte. Eine geschlossene Linie, welche von einem Puncte z_0 aus beide Puncte 1 und b umgiebt, kann ersetzt werden durch zwei geschlossene Linien, von denen jede nur einen derselben umgiebt. Geht nun w' mit dem Werthe w'_0 aus z_0 aus, so geht beim Umkreisen des Punctes, b, w_0' in $-w_0'$, und dann beim Umkreisen des Punctes 1 wieder $-w_0'$ in w_0' über. Die Function kommt also mit dem ursprünglichen Werthe nach z_0 zurück. Dies bleibt nun bestehen, wenn b sich dem Puncte 1 nähert, und wir sehen,

dass wenn diese Verzweigungspuncte auf einander fallen, der gemeinschaftliche Punct aufhört, ein Verzweigungspunct zu sein. Es leuchtet ein, dass dies allgemein gelten muss: sobald bei zwei Verzweigungspuncten nur zwei und zwar die nämlichen zwei Functionswerthe gegenseitig in einander übergehen, so heben diese Verzweigungspuncte beim Zusammenfallen einander auf, und es entsteht ein Punct, der kein Verzweigungspunct mehr ist.

Drittes Beispiel. Sei

$$w = \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}},$$

worin a und b zwei complexe Constanten bedeuten. Hier haben wir zwei Verzweigungspuncte $z = a$ und $z = b$. Lässt man nun zuerst z eine geschlossene Linie von einem beliebigen Puncte z_0 aus um den Punct a beschreiben, welche aber b nicht umgiebt, und setzt zu dem Ende

$$z - a = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

während

$$z_0 - a = r_0\,(\cos\varphi_0 + i \sin\varphi_0)$$

sei, so ist der Anfangswerth von w, der hier mit w_1 bezeichnet werden möge,

$$w_1 = \frac{r_0^{\frac{1}{3}}\,(\cos\tfrac{1}{3}\varphi_0 + i \sin\tfrac{1}{3}\varphi_0)}{[a - b + r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)]^{\frac{1}{3}}}.$$

Nachdem die geschlossene Linie einmal in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen ist, ist φ_0 um 2π gewachsen, und daher der entstehende Werth von w, welcher mit w_2 bezeichnet werden soll,

$$w_2 = \frac{r_0^{\frac{1}{3}}\,(\cos(\tfrac{1}{3}\varphi_0 + \tfrac{2}{3}\pi) + i \sin(\tfrac{1}{3}\varphi_0 + \tfrac{2}{3}\pi))}{[a - b + r_0\,(\cos\varphi_0 + i \sin\varphi_0)]^{\frac{1}{3}}}$$

geworden. Dabei kann der Nenner, also die Grösse $\sqrt[3]{z-b}$ ihren Werth nicht geändert haben, weil für diese $z = a$ kein Verzweigungspunct ist, sondern nur $z = b$, also z eine geschlossene Linie beschrieben hat, die den Verzweigungspunct dieser Grösse nicht enthält. Bezeichnet man mit α den Werth

$$\alpha = \cos\tfrac{2}{3}\pi + i \sin\tfrac{2}{3}\pi = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

sodass α eine Wurzel der Gleichung $\alpha^3 = 1$ ist, so kann man auch schreiben, da

$\cos(\frac{1}{3}\varphi_0+\frac{2}{3}\pi)+i\sin(\frac{1}{3}\varphi_0+\frac{2}{3}\pi)=(\cos\frac{1}{3}\varphi_0+i\sin\frac{1}{3}\varphi_0)(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi)$
ist,

$$w_2 = \alpha w_1.$$

Lässt man nun die Variable auf's Neue eine geschlossene Linie um den Punct a herum beschreiben, so geht jetzt w mit dem Werthe $w_2 = \alpha w_1$ von z_0 aus und erlangt folglich nach Vollendung des Umlaufs den Werth

$$w_3 = \alpha w_2 = \alpha^2 w_1.$$

Nach einem dritten Umlaufe endlich erlangt w den Werth $\alpha^3 w_1$, erhält also den ursprünglichen Werth w_1 wieder, da $\alpha^3 = 1$ ist. Wäre man, statt ursprünglich mit dem Werthe w_1 von z_0 auszugehen, zuerst mit dem Werthe w_2 ausgegangen, so hätte man nach resp. ein und zwei Umläufen die Werthe w_3 und w_1 erhalten; wäre aber w_3 der ursprüngliche Werth gewesen, so würde dieser in w_1 und w_2 übergegangen sein.

Aehnlich verhält es sich, wenn man z eine geschlossene Linie beschreiben lässt, die nur den Punct b umgiebt. Man setze alsdann

$$z - b = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

und lasse w mit dem Werthe w_1 von z_0 ausgehen, wo w_1 jetzt folgenden Ausdruck hat

$$w_1 = \frac{[b - a + r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)]^{\frac{1}{3}}}{r_0^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{1}{3}\varphi_0 + i\sin\frac{1}{3}\varphi_0)}.$$

Nach einem Umlaufe des z in der Richtung der wachsenden Winkel wird der Werth von w

$$= \frac{[b - a + r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)]^{\frac{1}{3}}}{r_0^{\frac{1}{3}}(\cos(\frac{1}{3}\varphi_0 + \frac{2}{3}\pi) + i\sin(\frac{1}{3}\varphi_0 + \frac{2}{3}\pi))},$$

wobei sich jetzt der Zähler nicht geändert haben kann, weil der Verzweigungspunct desselben, a, nicht umschrieben worden ist. Man erhält also jetzt für w den Werth

$$\frac{w_1}{\alpha} = \alpha^2 w_1, \text{ d. h. den Werth } w_3.$$

Nach einem zweiten Umlaufe erhält man

$$\frac{w_1}{\alpha^2} = \alpha w_1, \quad \text{also } w_2;$$

endlich nach einem dritten Umlaufe stellt der ursprüngliche Werth w_1 sich wieder ein, da

$$\frac{w_1}{\alpha^3} = w_1$$

ist.

Man sieht hieraus, dass die Functionswerthe bei mehrmaligem Umkreisen eines Verzweigungspunctes sich cyclisch mit einander vertauschen. Beim Umkreisen des Punctes a in der Richtung der wachsenden Winkel gehen

$$w_1 \quad w_2 \quad w_3$$

nach dem ersten Umlaufe der Reihe nach über in

$$w_2 \quad w_3 \quad w_1,$$

und nach dem zweiten Umlaufe in

$$w_3 \quad w_1 \quad w_2;$$

bei einem dritten Umlaufe stellen sich daher die ursprünglichen Werthe

$$w_1 \quad w_2 \quad w_3$$

wieder ein. Ebenso gehen beim Umkreisen des Punctes b in der Richtung der wachsenden Winkel die Werthe

$$w_1 \quad w_2 \quad w_3$$

in

$$w_3 \quad w_1 \quad w_2$$

und in

$$w_2 \quad w_3 \quad w_1$$

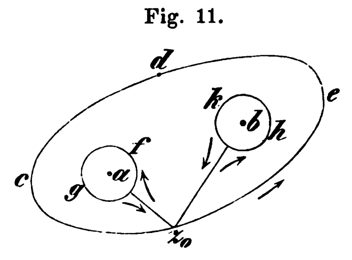
über und erhalten nach dem dritten Umlaufe die ursprünglichen Werthe

$$w_1 \quad w_2 \quad w_3$$

wieder.

Untersuchen wir nun noch, was eintritt, wenn z eine geschlossene Linie beschreibt, welche beide Puncte, a und b, enthält. Eine solche kann stets ohne Ueberschreitung eines dieser Puncte in eine andere übergeführt werden, die aus einer successiven Umkreisung des einen und des andern besteht (Fig. 11). Man lässt dann z zuerst von z_0 aus den Punct a umkreisen, nach z_0 zurückkehren und dann den Punct b umkreisen. Auf diesem Wege erhält w bei der letzten Rückkunft nach z_0 denselben Werth, als wenn z die geschlossene Linie um beide Verzweigunspuncte durchläuft (§ 9). Geht nun w mit w_1 aus z_0 aus, so erhält es nach der Umkreisung von a den Werth $\alpha w_1 = w_2$, alsdann nach der Umkreisung von b den Werth $\frac{w_2}{\alpha} = w_1$; die Function bekommt also ihren ursprünglichen Werth wieder. Be-

Fig. 11.



trachtet man in dieser Beziehung statt der gegebenen Function die folgende

$$w' = \sqrt[3]{(z-a)\,(z-b)},$$

bei welcher, wie man leicht übersehen wird, auch bei einer Umkreisung des Punctes b dem ursprünglichen Functionswerthe der Factor α hinzugefügt wird, so geht bei der Umkreisung von a w_1' in $\alpha w_1' = w_2'$, und bei der Umkreisung von b, w_2' in $\alpha w_2' = w_3'$ über. Ein Umlauf um beide Puncte verwandelt also w_1' in w_3'; ein zweiter Umlauf wird daher w_3' in w_2', und ein dritter w_2' in w_1' verwandeln.

Viertes Beispiel. Die Function

$$w = \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}} + \sqrt{z-c},$$

welche die Wurzel der Gleichung 6ten Grades

$$(z-b)^2 w^6 - 3\,(z-b)^2 (z-c)\, w^4 - 2\,(z-a)\,(z-b)\, w^3$$
$$+ 3\,(z-b)^2 (z-c)^2 w^2 - 6\,(z-a)\,(z-b)\,(z-c)\, w$$
$$+ (z-a)^2 - (z-b)^2 (z-c)^3 = 0$$

ist, hat die Puncte a, b, c zu Verzweigungspuncten. Führt man der Kürze wegen

$$\sqrt[3]{z-a} = t\,,\quad \sqrt[3]{z-b} = u\,,\quad \sqrt{z-c} = v$$

ein und giebt dem Buchstaben α dieselbe Bedeutung wie in dem vorigen Beispiele, so kann man die 6 Functionswerthe folgendermassen schreiben:

$$w_1 = \frac{t}{u} + v \qquad w_4 = \frac{t}{u} - v$$
$$w_2 = \alpha\frac{t}{u} + v \qquad w_5 = \alpha\frac{t}{u} - v$$
$$w_3 = \alpha^2\frac{t}{u} + v \qquad w_6 = \alpha^2\frac{t}{u} - v.$$

Betrachten wir nun zuerst Umläufe der Variablen um den Punct a; dabei geht t in αt, $\alpha^2 t$, t, ... über, während u nnd v ungeändert bleiben; demnach geht über:

	w_1,	w_2,	w_3	w_4	w_5	w_6
nach dem ersten Umlauf in	w_2	w_3	w_1	w_5	w_6	w_4
„ „ zweiten „ „	w_3	w_1	w_2	w_6	w_4	w_5
„ „ dritten „ „	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6.

Um diesen Verzweigungspunct herum permutiren sich also nur die Werthe w_1, w_2, w_3 für sich, und w_4, w_5, w_6 für sich.

Bei Umläufen um den Punct b bleiben t und v ungeändert, und u verwandelt sich in αu, $\alpha^2 u$, u, ····. Also gehn über:

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
nach dem ersten Umlauf in	w_3	w_1	w_2	w_6	w_4	w_5
„ „ zweiten „ „	w_2	w_3	w_1	w_5	w_6	w_4
„ „ dritten „ „	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6;

hier permutiren sich also dieselben Functionswerthe, wie bei a, nur in umgekehrter Aufeinanderfolge.

Bei Umläufen um den Punct c endlich bleiben t und u ungeändert, und v verwandelt sich in $-v$, $+v$, ·····. Daher gehn hier über:

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
nach dem ersten Umlauf in	w_4	w_5	w_6	w_1	w_2	w_3
„ „ zweiten „ „	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6.

In diesem Beispiele haben wir also erstlich zwei Verzweigungspuncte a und b, um welche herum die drei Werthe w_1, w_2, w_3 cyclisch in einander übergehn, niemals aber in einen der drei übrigen Werthe; ebenso permutiren sich hier w_4, w_5, w_6 cyclisch unter einander und gehen nie in einen der drei ersteren über. Alsdann haben wir noch einen Verzweigungspunct c, in welchem die drei Paare w_1, w_4; w_2, w_5; w_3, w_6 jedes unter sich ihre Werthe vertauschen, ohne dass jemals ein Werth aus einem andern Paare dazu träte.

Lässt man z eine geschlossene Linie beschreiben, welche zwei Verzweigungspuncte umgiebt, so kann man eine solche wieder durch zwei successive Umkreisungen je eines Punctes ersetzen. Werden die Puncte a und b umschlossen, so verhält sich die Sache ebenso wie bei dem vorigen Beispiele, wir wollen daher nur Umläufe um a und c verfolgen und stellen das Ergebniss in folgender Tabelle zusammen:

Umläufe	um a	um c	um beide
1	w_1 geht über in w_2	w_2 in w_5	w_1 in w_5
2	w_5 „ „ „ w_6	w_6 „ w_3	w_5 „ w_3
3	w_3 „ „ „ w_1	w_1 „ w_4	w_3 „ w_4
4	w_4 „ „ „ w_5	w_5 „ w_2	w_4 „ w_2
5	w_2 „ „ „ w_3	w_3 „ w_6	w_2 „ w_6
6	w_6 „ „ „ w_4	w_4 „ w_1	w_6 „ w_1

Dabei erreicht also w seinen ursprünglichen Werth erst nach 6 Umläufen um die Puncte a und c.

§ 11.

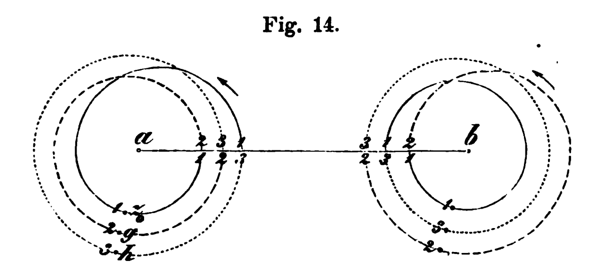
Die im Vorigen angestellten Betrachtungen zeigen, dass man bei einer mehrdeutigen Function, indem man der Variablen complexe Werthe zuertheilt und dieselbe eine Reihe stetig auf einander folgender Werthe durchlaufen lässt, die mit demselbeu Werthe endigen, mit dem sie begonnen haben (geometrisch ausgedrückt, indem man die Variable eine geschlossene Linie beschreiben lässt), von einem der Werthe, die eine Function für denselben Werth der Variablen anzunehmen vermag, zu einem andern auf stetige Weise übergehen kann. Es ist ferner gezeigt worden, dass eine bestimmte stetige Reihenfolge der Werthe der Variablen (ein bestimmter Weg) auch stets zu einem bestimmten Functionswerthe führt, mit alleiniger Ausnahme des Falles, wo der Weg der Variablen durch einen Verzweigungspunct hindurch führt, ein Fall, der aber immer dadurch vermieden werden kann, dass man die Variable in der Nähe des Verzweigungspunctes eine beliebig kleine Ausbiegung machen lässt. Hieran knüpft sich nun der natürliche Wunsch, sich von der Verschiedenheit der Werthe einer mehrdeutigen Function zu befreien, um eine solche wie eine eindeutige behandeln zu können. Nach den früheren Auseinandersetzungen ist hierzu nur erforderlich, dass man sich von der Verschiedenartigkeit der Wege befreie, welche die Variable zwischen zwei bestimmten Puncten durchlaufen kann. Nun bemerkte schon *Cauchy*, dass man dies, wenigstens in beschränkter Weise, dadurch erreichen könne, dass man gewisse Theile der Ebene, in welcher die Variable z sich bewegend gedacht wird, abgrenzt und der Veränderlichen nicht gestattet, die Grenzen eines solchen Gebietes zu überschreiten. Da nämlich eine Function, von einem Puncte z_0 der Variablen ausgehend, in einem anderen Puncte z_1 nur dann verschiedene Werthe annehmen kann, wenn zwei von der Variablen durchlaufene Wege einen Verzweigungspunct einschliessen (§ 9), so ist es stets leicht, ein Stück der z-Ebene abzugrenzen, innerhalb dessen von z_0 nach z_1 zwei solche Wege nicht möglich sind. Innerhalb eines solchen Gebietes bleibt dann die Function eindeutig, da sie in jedem Puncte z_1 auf jedem Wege nur einen einzigen Werth erhält. *Cauchy* nannte dann die Function monodrom in diesem Gebiete, wofür *Riemann* das deutsche Wort einändrig setzte. Allein auf

diese Weise wird der Variablen eine Schranke auferlegt, welche man nicht immer einhalten kann, da die Untersuchungen oft über das Gebiet, innerhalb dessen eine Function einändrig ist, hinausführen. Daher hat *Riemann* ein anderes Mittel ersonnen, sich von der Mehrdeutigkeit der Functionen zu befreien, welches vollständig zum Ziele führt.

Riemann nimmt an, dass wenn eine Function n-deutig ist, also jedem Werthe der Variablen n Werthe der Function zugehören, die Ebene der z aus n über einander liegenden Schichten oder Blättern bestehe (oder dass n solche Blätter über der Ebene der z ausgebreitet seien), über welche die Variable sich frei hin bewegen kann. Jedem Puncte in jedem Blatte entspricht nur ein einziger Werth der Function, und den n unmittelbar über einander liegenden Puncten aller n Blätter die n verschiedenen Werthe der Function, die demselben Werthe von z angehören. In den Verzweigungspuncten nun, wo mehrere sonst verschiedene Functionswerthe einander gleich sind, hängen mehrere jener Blätter zusammen, sodass der betreffende Verzweigungspunct zu gleicher Zeit in allen diesen zusammenhängenden Blättern liegend gedacht wird. Die Anzahl dieser so in einem Verzweigungspuncte zusammenhängenden Blätter kann für jeden Verzweigungspunct verschieden sein und ist gleich der Anzahl der Functionswerthe, welche beim Umlaufe der Variablen um den Verzweigungspunct cyclisch in einander übergehen. In dem letzten Beispiele des vorigen §, wo die Function 6-werthig ist, werden wir die z-Ebene als aus 6 Blättern bestehend annehmen. Um jeden der Verzweigungspuncte a und b herum gehen einerseits die Werthe w_1, w_2, w_3 und andrerseits die Werthe w_4, w_5, w_6 in einander über; daher nehmen wir an, dass in jedem dieser Puncte einerseits die Blätter 1, 2, 3, andrerseits die Blätter 4, 5, 6 zusammenhängen. Um den Punct c herum dagegen gehen erstens w_1 und w_4, zweitens w_2 und w_5 und drittens w_3 und w_6 gegenseitig in einander über; daher hängen im Puncte c einmal die Blätter 1 und 4, dann die Blätter 2 und 5 und endlich die Blätter 3 und 6 zusammen. Um nun den stetigen Uebergang eines Functionswerthes in einen andern zu vermitteln, werden sogenannte Verzweigungsschnitte geführt. Dies sind ganz beliebige, nur sich selbst nicht schneidende, Linien, welche entweder von einem Verzweigungspuncte aus ins Unendliche gehn

oder zwei Verzweigungspuncte mit einander verbinden. Ueber diese Verzweigungsschnitte hinüber denkt man sich nun die Blätter nicht so zusammenhängend, wie sie natürlich über einander liegen, sondern so, wie die Functionswerthe in einander übergehen. Legen wir z. B. in dem letzten Beispiele des vorigen § einen Verzweigungsschnitt von a nach b (Fig. 14), so lassen wir, indem wir den Punct a in der Richtung der wachsenden Winkel

Fig. 14.

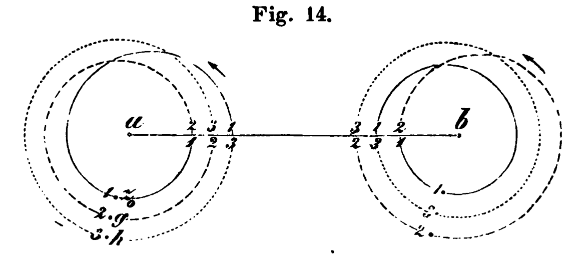


umkreisen, über den Verzweigungsschnitt hinüber das Blatt 1 mit dem Blatte 2, dann 2 mit 3 und endlich 3 wieder mit 1 zusammenhängen. Wir wollen die rechte Seite des Verzweigungsschnittes $\overline{ab}$ diejenige nennen, welche ein Beobachter zur Rechten hat, wenn er sich in a befindet und nach b hinsieht. Geht dann z von einem Puncte z_0 im Blatte 1 (w mit dem Werthe w_1) aus und umkreist den Punct a in der Richtung der wachsenden Winkel, so gelangt es, indem es den Verzweigungsschnitt von der Rechten zur Linken überschreitet aus dem ersten Blatte in das zweite und befindet sich noch darin, wenn es nach z_0 zurück oder vielmehr in den unmittelbar unter z_0 im 2ten Blatte liegenden Punct g kommt, sodass jetzt w den Werth w_2 erlangt hat. Wird dann der Kreislauf fortgesetzt, so gelangt z, wenn es zum zweiten Male den Verzweigungsschnitt von der Rechten zur Linken überschreitet, in das 3te Blatt und befindet sich noch darin, wenn es nach dem in diesem Blatte unter z_0 befindlichen Puncte h gekommen ist; jetzt hat w den Werth w_3 erhalten. Ueberschreitet endlich z den Verzweigungsschnitt zum dritten Male, so nehmen wir an, dass nun die rechte Seite des 3ten Blattes sich durch das 2te Blatt hindurch mit der linken Seite des 1sten Blattes über den Verzweigungsschnitt hinüber verbinde, sodass dann z aus dem 3ten Blatte in das 1ste hinübertrete und dann wirklich

wieder nach z_0 zurückgelangt.*) Jetzt erst ist die Linie wirklich geschlossen, und w hat auch wieder seinen ursprünglichen Werth erlangt. In Fig. 14 sind die Linien mit den Nummern der Blätter bezeichnet, in denen sie verlaufen, und ausserdem die im 2ten und 3ten Blatte verlaufenden resp. gestrichelt und punctirt. Die Puncte z_0, g, h, welche eigentlich direct unter einander liegen sollen, sind der Deutlichkeit wegen neben einander gezeichnet.

In ähnlicher Weise hat man sich die Sache bei allen Verzweigungspuncten zu denken, und da von jedem solchen Puncte ein Verzweigungsschnitt ausgeht, so kann die Variable den Verzweigungspunct nicht umkreisen, ohne den Verzweigungsschnitt zu überschreiten und dadurch nach und nach in alle diejenigen Blätter zu gelangen, welche in dem Verzweigungspuncte zusammenhängen. Wie in jedem Falle die Verzweigungsschnitte zu legen sind, hängt von der zu untersuchenden Function ab und kann meist in verschiedener Weise gewählt werden. In unserem Beispiele darf man a und b durch einen solchen Schnitt verbinden, weil bei der Umkreisung des Punctes b in der Richtung der wachsenden Winkel die Function w_1 in w_3, und diese in w_2 übergeht (Fig. 14), und daher bei b dieselben Blätter und in derselben Weise zusammenhängen wie bei a, nämlich die rechte Seite von 1 mit der linken von 2, die rechte Seite von 2 mit der linken von 3, und die rechte Seite von 3 mit der linken von 1.

Fig. 14.



*) Dies würde sich in Wirklichkeit, z. B. an einem Modell vollständig allerdings nicht ausführen lassen; aber man kann dadurch ein ganz anschauliches Modell herstellen, dass man das erste Blatt mit dem zweiten nur längs eines Theiles des Verzweigungsschnittes, etwa mittelst eines übergeklebten Papierstreifens, verbindet, ebenso das zweite mit dem dritten, und dabei eine Lücke lässt, durch welche hindurch das dritte Blatt mit dem ersten verbunden werden kann. Dies Verfahren lässt sich in allen Fällen ausführen, z. B. auch da, wo die Blätter 1, 4; 2, 5; 3, 6 gegenseitig in einander übergehn.

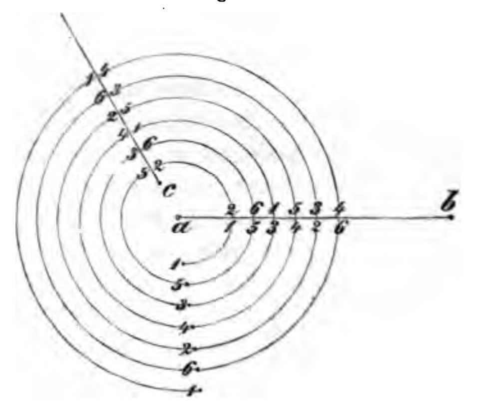
Bleiben wir noch bei diesem Beispiele stehn, und untersuchen wir auch den im vorigen § besprochenen Umlauf um a und b und um a und c. Bei einem Umlauf um a und b wird der Verzweigungsschnitt gar nicht überschritten, sodass z im 1sten Blatte bleibt; in der That erhält nach einem solchen Umlauf w in z_0 seinen Anfangswerth wieder (vgl. Beisp. 3. § 10). Um die Umkreisung der Puncte a und c zu untersuchen, legen wir von c aus einen Verzweigungsschnitt ins Unendliche und lassen hier je zwei der Blätter 1, 4; 2, 5; 3, 6 gegenseitig in einander übergehen.

Für die hier stattfindenden Uebergänge der Functionswerthe hatten wir S. 52 folgende Tabelle gefunden:

Umläufe	um a	um c	um beide
1	w_1 geht über in w_2	w_2 in w_5	w_1 in w_5
2	w_5 „ „ „ w_6	w_6 „ w_3	w_5 „ w_3
3	w_3 „ „ „ w_1	w_1 „ w_4	w_3 „ w_4
4	w_4 „ „ „ w_5	w_5 „ w_2	w_4 „ w_2
5	w_2 „ „ „ w_3	w_3 „ w_6	w_2 „ w_6
6	w_6 „ „ „ w_4	w_4 „ w_1	w_6 „ w_1

Diese Uebergänge sind in Fig. 15 dargestellt, indem jede Linie mit der Nummer des Blattes bezeichnet ist, in welcher sie verläuft. Die eigentlich unter dem Ausgangspuncte 1 liegenden Puncte sind der Deutlichkeit wegen neben einander gezeichnet, und den letzten Punct 1 hat man sich mit dem ersten als zusammenfallend zu denken.

Fig. 15.



Dieses in unserem Beispiele aus 6 Blättern bestehende Gebiet für die Veränderliche z bildet nun eine einzige zusammenhängende Fläche, indem die Blätter in den Verzweigungspuncten zusammenhängen und längs der Verzweigungsschnitte in einander

übergehen. In dieser Fläche ist w eine vollkommen eindeutige Function des Ortes in der Fläche, da sie in jedem Puncte der letzteren denselben Werth erlangt, auf welchem Wege auch die Variable zu dem Puncte gelangen möge. Beschreibt z zwischen zwei Puncten zwei Wege, welche einen Verzweigungspunct einschliessen, so muss einer von beiden nothwendig einen Verzweigungsschnitt überschreiten und dadurch in ein anderes Blatt gelangen, so dass die Endpuncte der beiden Wege nicht mehr als zusammenfallend, sondern als zwei verschiedene Puncte der z-Fläche zu betrachten sind, in denen dann auch verschiedene Functionswerthe statt haben. Beschreibt aber z eine wirklich geschlossene Curve, d. h. fallen Anfangs- und Endpunct der Curve in den nämlichen Punct des nämlichen Blattes zusammen, so erhält auch die Function den Anfangswerth wieder. Nur wenn die Variable durch einen Verzweigungspunct hindurch geht, kann sie nach Belieben in jedes der hier zusammenhängenden Blätter übergehn, und dann bleibt es unbestimmt, welchen Werth die Function annimmt. (§ 8.)

§ 12.

Um nun im Allgemeinen nachzuweisen, dass wirklich in allen Fällen durch eine die z-Ebene n-fach bedeckende Fläche, deren einzelne Blätter in den Verzweigungspuncten und längs der Verzweigungsschnitte in der oben erläuterten Weise zusammenhängen, eine n-deutige Function in eine eindeutige verwandelt werden kann, haben wir nur unser Augenmerk auf irgend eine scheinbar geschlossene Linie zu richten, worunter wir eine Linie verstehen wollen, deren Endpunct unter oder über dem Anfangspuncte in einem anderen Blatte wie der letztere liegt. Wenn eine solche scheinbar geschlossene Linie, welche einen oder mehrere Verzweigungspuncte beliebig oft umwinden mag, und von der wir nur voraussetzen, dass sie durch keinen Verzweigungspunct hindurchführt, von der Variablen durchlaufen ist, so wird jeder der n Functionswerthe entweder ungeändert geblieben oder in einen anderen übergegangen sein, sodass die n Werthe wieder sämmtlich, nur in einer anderen Anordnung, auftreten. Nun kann aber jede beliebige Anordnung von n Elementen aus einer anderen Anordnung durch eine Reihe cyclischer Vertauschungen erzeugt werden. Unter einer cyclischen Vertauschung $p$ter Ordnung versteht man nämlich eine solche, bei welcher man aus

den vorhandenen n Elementen beliebige p herausgreift und nun an die Stelle des ersten ein zweites, an Stelle dieses ein drittes u. s. w., endlich an Stelle des $p$ten wieder das erste setzt. Eine solche cyclische Vertauschung $p$ter Ordnung hat die Eigenschaft, dass nach p Wiederholungen derselben, und nicht früher, die ursprüngliche Anordnung wieder zum Vorschein kommt; denn da an die Stelle jedes Elementes ein anderes, an die Stelle des $p$ten aber das erste tritt, so kann jedes Element erst dann wieder an seiner ursprünglichen Stelle erscheinen, wenn die sämmtlichen $p-1$ anderen Elemente an derselben Stelle aufgetreten sind, dann aber tritt jedes Element auch wirklich wieder an seine ursprüngliche Stelle. Um nun nachzuweisen, dass jede Anordnung aus einer anderen durch eine Reihe cyclischer Vertauschungen erzeugt werden kann, nehmen wir an, irgend eine Anordnung entstehe aus einer anderen so, dass an die Stelle eines Elementes, z. B. 1 ein anderes, z. B. 3, getreten sei. An die Stelle von 3 tritt dann entweder 1, und dann haben wir schon eine cyclische Vertauschung zweiter Ordnung, oder ein anderes z. B. 5. An die Stelle dieses letzteren tritt nun wieder entweder das erste 1, und dann haben wir eine cyclische Vertauschung dritter Ordnung, oder wiederum ein anderes, das nothwendig von den schon benutzten 1, 3, 5 verschieden sein muss. An die Stelle dieses kann entweder das erste treten, wodurch eine cyclische Vertauschung geschlossen wäre, oder wieder ein anderes; einmal aber muss die cyclische Vertauschung sich schliessen, weil überhaupt nur eine endliche Anzahl von Elementen vorhanden ist, und das erste Element 1 sich an irgend einer Stelle der zweiten Anordnung vorfinden muss. Auf diese Weise ist dann eine Reihe von Elementen abgefertigt. Beginnt man nun mit irgend einem der noch nicht verwendeten Elemente, so kann man das vorige Verfahren wiederholen, bis alle Elemente erschöpft sind und hat so eine gewisse Anzahl cyclischer Vertauschungen erhalten, welche nach einander angewendet, die zweite Anordnung aus der ersten erzeugen. Hat ein Element bei der zweiten Anordnung seine Stelle nicht geändert, so kann eine Nicht-änderung als eine cyclische Vertauschung erster Ordnung angesehen werden. Ein Beispiel möge das Vorige erläutern. Seien die 11 Elemente

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

in die Anordnung

3 11 5 2 7 10 1 9 6 8 4

übergegangen; so sieht man, dass nach der Reihe

1 3 5 7

in 3 5 7 1

übergegangen sind; diese bilden also eine cyclische Vertauschung vierter Ordnung. Geht man dann von 2 aus, so zeigt sich, dass

2 11 4

in 11 4 2

übergehn; also hat man eine zweite cyclische Vertauschung dritter Ordnung. Das nächste noch nicht verwendete Element ist 6. Dann geht 6 10 8 9

in 10 8 9 6

über, und man hat eine dritte cyclische Vertauschung vierter Ordnung. Jetzt sind alle 11 Elemente erschöpft, und folglich wird die zweite gegebene Anordnung aus der ersten durch die gefundenen drei cyclischen Vertauschungen erzeugt.

Kehren wir nun zu unseren Functionswerthen zurück, so folgt, dass was auch immer für eine Anordnung derselben durch eine scheinbar geschlossene Linie entstehen mag, dieselbe immer durch eine Reihe cyclischer Vertauschungen der Functionswerthe hervorgebracht werden kann. Damit ist zuerst die Einführung der Verzweigungspuncte und der von ihnen ausgehenden Verzweigungsschnitte gerechtfertigt, um welche herum die Functionswerthe nur cyclische Vertauschungen erleiden. Aber diese müssen auch ganz bestimmte sein, denn die Werthänderung, welche jeder Functionswerth bei einer einmaligen Umkreisung des Verzweigungspunctes erfährt, erfährt der nämliche Functionswerth bei einer zweiten Umkreisung wieder, sodass andre als die bestimmten Glieder der cyclischen Vertauschung hier nicht vorkommen können. Dadurch rechtfertigt sich, dass in jedem Verzweigungspuncte nur eine Anzahl ganz bestimmter Blätter zusammenhängen. Da endlich jeder scheinbar geschlossene Weg in eine Reihe von Umkreisungen der einzelnen Verzweigungspuncte umgeformt werden kann (§ 9), so können überhaupt nur solche Anordnungen der Functionswerthe vorkommen, welche durch die bestimmten bei den Umkreisungen der Verzweigungspuncte stattfindenden cyclischen Vertauschungen erzeugt werden können.

Damit ist dargethan, dass alle Anordnungen, welche die Functionswerthe einer n-werthigen Function eingehen können,

durch die cyclischen Vertauschungen um die Verzweigungspuncte herum hervorgebracht werden; und denkt man sich nun die Blätter der Fläche längs der Verzweigungsschnitte in der Weise zusammenhängend, wie die cyclischen Vertauschungen es verlangen, so vertheilen sich für jeden Werth von z die einzelnen Functionswerthe auf die einzelnen Blätter, und die Function wird in der That zu einer eindeutigen Function des Ortes dieser Fläche.

Hierdurch ist die Vieldeutigkeit der Functionen aufgehoben, und wir werden nun im Folgenden stets annehmen, dass das Gebiet der Veränderlichen aus so vielen Blättern bestehe, als nöthig sind, um eine zu betrachtende vieldeutige Function in eine eindeutige zu verwandeln, und werden zwei Puncte nur dann als identisch betrachten, wenn sie auch demselben Blatte der Fläche angehören. Demgemäss nennen wir eine Linie nur dann wirklich geschlossen, wenn ihr Anfangs- und Endpunct in dem nämlichen Puncte des nämlichen Blattes zusammenfallen. Endigt dagegen eine Linie in einem Puncte, der unter oder über dem Anfangspuncte in einem anderen Blatte liegt, so nennen wir die Linie scheinbar geschlossen.

§ 13.

Hieran knüpfen sich noch folgende Bemerkungen. Beim Ueberschreiten eines Verzweigungsschnittes setzt sich, wie erläutert worden ist, ein Blatt in ein anderes fort, in der Art, dass wenn die Variable sich auf demselben fortbewegt, die Function sich stetig ändert. Wenn dagegen die Variable in dem nämlichen Blatte von der einen Seite eines Verzweigungsschnittes auf die andere Seite desselben hinüber tritt, so erleidet die Function eine Unterbrechung der Stetigkeit; in der That wird angenommen, dass der auf der rechten Seite eines Verzweigungsschnittes befindliche Theil eines Blattes mit dem auf der linken Seite liegenden Theile desselben Blattes über den Verzweigungsschnitt hinüber nicht im Zusammenhange steht. In zwei Puncten, welche einander unendlich nahe liegen, aber in dem nämlichen Blatte auf verschiedenen Seiten eines Verzweigungsschnittes sich befinden, sind daher die Functionswerthe nicht auch nur um ein unendlich Kleines von einander verschieden, sondern um eine endliche Grösse, falls die beiden Puncte nicht gerade einem Verzweigungspuncte unendlich nahe liegen. Man drückt dies auch

kurz so aus, dass man sagt, die Function hat in demselben Blatte zu beiden Seiten eines Verzweigungsschnittes verschiedene Werthe, während sie auf den in einander übergehenden Blättern zu beiden Seiten des Verzweigungsschnittes gleiche Werthe hat. Nimmt man z. B. bei $\sqrt{z}$ den von dem Verzweigungspuncte $z = 0$ ausgehenden positiven Theil der Hauptaxe als Verzweigungsschnitt und betrachtet zwei Puncte $1 + \varepsilon$ und $1 - \varepsilon$, welche zu beiden Seiten des Verzweigungsschnittes unendlich nahe an dem Puncte 1 liegen, indem ε eine unendlich kleine (etwa rein imaginäre) Grösse bedeute; nimmt man ferner an, auf der linken Seite der positiven Hauptaxe hätten im ersten Blatte die Werthe von $\sqrt{z}$ das Vorzeichen $+$ und daher im 2ten Blatte das Vorzeichen $-$, so ist für $z = 1 + \varepsilon$ im ersten Blatte $\sqrt{z} = + \sqrt{1+\varepsilon}$, für $z = 1 - \varepsilon$ dagegen in demselben Blatte $\sqrt{z} = - \sqrt{1-\varepsilon}$; denn geht man von $z = 1$ auf einer geschlossenen Linie in der Richtung der wachsenden Winkel um den Nullpunct herum nach 1 zurück, so geht $\sqrt{z}$ von $+ 1$ in $- 1$ über (§ 10. Beisp. 1). Daher haben die Werthe von $\sqrt{z}$ auf der rechten Seite des Verzweigungsschnittes im ersten Blatte das Vorzeichen $-$, und im zweiten Blatte das Vorzeichen $+$. Lässt man nun z den Verzweigungsschnitt überschreiten und von $1 - \varepsilon$ im ersten Blatte nach $1 + \varepsilon$ im zweiten Blatte gelangen, so geht $- \sqrt{1-\varepsilon}$ in $- \sqrt{1+\varepsilon}$ über. Diese Aenderung ist stetig, da der Unterschied gleich $- \sqrt{1+\varepsilon} + \sqrt{1-\varepsilon}$, also mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung gleich $-(1 + \frac{1}{2}\varepsilon) + (1 - \frac{1}{2}\varepsilon) = -\varepsilon$, daher unendlich klein ist. Tritt aber z von $1 - \varepsilon$ auf dem rechten Theile des ersten Blattes nach $1 + \varepsilon$ auf dem linken Theile desselben Blattes hinüber, so geht $- \sqrt{1-\varepsilon}$ in $+ \sqrt{1+\varepsilon}$ über, und dann ist der Unterschied gleich $\sqrt{1+\varepsilon} + \sqrt{1-\varepsilon}$ $= 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + (1 - \frac{1}{2}\varepsilon) = 2$, also nicht mehr unendlich klein. Die Function macht also in der That einen Sprung.

Riemann nennt die Verzweigungspuncte auch Windungspuncte, weil die Fläche sich um einen solchen Punct wie eine Schraubenfläche von unendlich kleiner Ganghöhe herumwindet. Hängen dann in einem solchen Puncte nur zwei Blätter der Fläche zusammen, so heisst derselbe ein einfacher Verzweigungspunct oder ein Windungspunct erster Ordnung, hängen aber in ihm n Blätter der Fläche zusammen, so heisst er ein Windungspunct $(n - 1)$ter Ordnung. Für manche Unter-

suchungen ist es nun wichtig zu zeigen, dass ein Windungspunct $(n - 1)$ter Ordnung immer so angesehen werden kann, als wenn in ihm $n - 1$ einfache Verzweigungspuncte zusammengefallen wären. Nehmen wir beispielsweise $n = 5$ an, so gelangt bei einem Verzweigungspuncte, in welchem 5 Blätter zusammenhängen, die Variable nach jedem Umlaufe in das nächstfolgende Blatt, und eine Curve muss 5 Umläufe um den Verzweigungspunct machen, ehe sie wieder in das erste zurückgelangt und sich schliesst. Dasselbe findet aber auch statt, wenn man 4 einfache Verzweigungspuncte a, b, c, d annimmt, in welchen der Reihe nach folgende Blätter zusammenhängen;

in	a	b	c	d
	1 und 2	1 und 3	1 und 4	1 und 5.

Fig. 16.

In Fig. 16 sind aa', bb', cc', dd' die Verzweigungsschnitte, und die Zahlen bedeuten die Nummern der Blätter, in welchen die Linien verlaufen. Ueberschreitet die Curve von z_0 aus den Schnitt aa', so tritt sie aus 1 in 2 und bleibt bei dem ganzen Umlauf in 2, weil dies Blatt in keinem der Puncte b, c, d mit einem anderen zusammenhängt. Beim ersten Umlaufe kommt also die Curve aus 1 in 2. Wird nun aa' zum zweiten Male überschritten, so tritt sie aus 2 in 1 und dann bei bb' aus 1 in 3. Dann aber bleibt sie bis zur Rückkunft nach z_0 in 3, also bringt der 2te Umlauf sie nach 3. Erst bei bb' tritt sie wieder aus 3 in 1 und dann bei cc' aus 1 in 4. In dieser Weise bringt jeder neue Umlauf die Curve in das nächstfolgende Blatt; nach dem 5ten Umlaufe gelangt sie daher in das erste Blatt zurück und schliesst sich. Man sieht also, dass die Uebergänge hier in derselben Weise stattfinden, wie bei einem Windungspuncte 4ter Ordnung, nähern sich daher die 4 einfachen Verzweigungspuncte und fallen schliesslich zusammen, so bleibt alles ungeändert. Es zeigt sich zugleich in diesem einfachen Falle, dass die Anzahl der Umläufe, welche eine Curve um ein Gebiet machen muss, um sich zu schliessen,

um 1 grösser ist, als die Anzahl der in diesem Gebiete enthaltenen einfachen Verzweigungspuncte, da der Windungspunct 4ter Ordnung 4 einfachen Verzweigungspuncten aequivalent ist. Es soll später gezeigt werden, dass diese Beziehung allgemein gilt.

§ 14.

Es scheint hier der geeignete Ort zu sein, einer Vorstellungsart Erwähnung zu thun, welche auch im Unendlichen entweder eine bestimmte Fortschreitung oder eine Verzweigung möglich macht. Nach *Riemann* kann man sich nämlich die Ebene, deren Puncte die Werthe einer veränderlichen Grösse darstellen, im Unendlichen geschlossen, als eine Kugel mit unendlich grossem Radius denken. Der unendlich entfernte Punct kann dann als ein ganz bestimmter in dieser geschlossenen Fläche aufgefasst werden. Besteht nun eine Fläche aus n Blättern, so ist jedes als im Unendlichen geschlossen, als eine Kugelfläche mit unendlich grossem Radius zu denken, und in jeder dieser Kugelflächen nimmt der unendlich entfernte Punct eine bestimmte Stelle ein. Dann ist es auch denkbar, dass mehrere Blätter in dem Punkte ∞ zusammenhängen, und dass dieser ein Verzweigungspunct ist. Um bei einer durch einen Ausdruck gegebenen Function $w = f(z)$ zu entscheiden, ob $z = \infty$ ein Verzweigungspunct ist, braucht man nur $z = \frac{1}{u}$ zu setzen. Geht dann $f(z)$ in $\varphi(u)$ über, so liefert jeder Verzweigungspunct $z = a$ von $f(z)$ für $\varphi(u)$ einen Verzweigungspunct $u = \frac{1}{a}$, und umgekehrt jeder Verzweigungspunct $u = b$ von $\varphi(u)$ einen solchen $z = \frac{1}{b}$ von $f(z)$; daher ist $z = \infty$ ein Verzweigungspunct von $f(z)$ oder nicht, je nachdem $u = 0$ ein Verzweigungspunct von $\varphi(u)$ ist oder nicht. Bei einer im Unendlichen geschlossenen Fläche, bei welcher $z = \infty$ ein bestimmter Punct ist, kann man nicht mehr einen unbestimmt ins Unendliche gehenden Verzweigungsschnitt ziehen, sondern, wenn ein solcher ins Unendliche geht, so endet er in dem bestimmten Puncte $z = \infty$. Zur Erläuterung dieser Vorstellungsart geschlossener Flächen und einiger dabei zur Sprache kommender Nebenumstände mögen ein Paar Beispiele vorgeführt werden, wobei wir uns in Betreff der Bezeichnungen der Kürze wegen auf die in § 10 und 11 angewendeten beziehen.

1) Die schon betrachtete Function

$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}} + \sqrt{z-c}$$

geht durch die Substitution $z = \frac{1}{u}$ in

$$\varphi(u) = \sqrt[3]{\frac{1-au}{1-bu}} + \frac{\sqrt{1-cu}}{\sqrt{u}}$$

über, daher ist $u = 0$ und also auch $z = \infty$ ein Verzweigungspunct, und zwar hängen, wie man sieht, hier dieselben Blätter zusammen, wie im Puncte c. Man wird daher einen Verzweigungsschnitt von a nach b, und einen zweiten von c nach ∞ ziehen.

2) Die Function

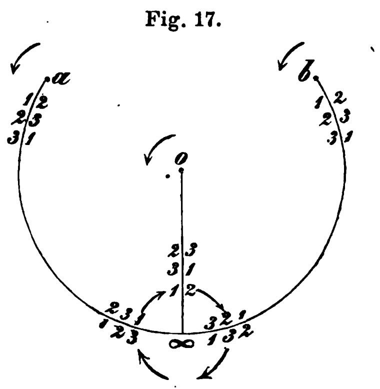
$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{(z-a)(z-b)}{z^2}}$$

geht in

$$\varphi(u) = \sqrt[3]{(1-au)(1-bu)}$$

über; daher ist $z = \infty$ kein Verzweigungspunct, sondern nur die Puncte 0, a und b. Man kann nun hier einen Verzweigungsschnitt von a durch ∞ nach b, und einen zweiten von 0 nach ∞ legen (Fig. 17). Dann gehen aber über den Theil $a\,\infty$ hinüber die Blätter in anderer Weise in einander über, wie über den Theil $b\,\infty$, nämlich so wie die Zahlen in der Figur es andeuten.

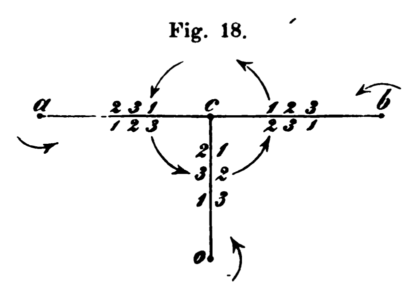
Fig. 17.



Um den Verzweigungspunct 0 in der Richtung der wachsenden Winkel herum geht $f(z)$ in $\frac{f(z)}{\alpha^2} = \alpha f(z)$, also 1 in 2 und daher auch 2 in 3, und 3 in 1 über. Umkreist man nun den Punct ∞, so geht beim Ueberschreiten von $0\,\infty$, 1 in 2, dann beim Ueberschreiten von $b\,\infty$, 2 in 3, und endlich beim Ueberschreiten von $a\,\infty$, 3 in 1 über. Hier kommt man also schon nach dem ersten Umlauf in das erste Blatt zurück, die Function ändert ihren Werth nicht, und der Punct ∞ ist daher wirklich kein Verzweigungspunct.

Man hätte hier auch die Puncte a und b durch einen in der Endlichkeit verlaufenden Verzweigungsschnitt verbinden können (Fig. 18). Dann muss es aber auf dieser Linie einen Punct c geben, wo die Scheidung statt findet, sodass über ac hinüber die Blätter in anderer Weise zusammenhängen, als über bc. Legt man dann den zweiten Verzweigungsschnitt von 0 nach c, so bleibt auch beim Umkreisen des Punctes c die Function ungeändert, sodass c kein Verzweigungspunct ist. Man kann hier die Sache in ähnlicher Weise, wie es im 2ten Beispiele des § 10 schon erläutert wurde, so ansehn, als wenn der Punct c durch das Zusammenfallen dreier Verzweigungspuncte d, e, f entstanden wäre, welche sich gegenseitig aufgehoben haben, sodass die gegebene Function aus der folgenden

Fig. 18.



$$\sqrt[3]{\frac{z-a}{z-d} \cdot \frac{z-b}{z-e} \cdot \frac{(z-f)^2}{z^2}}$$

dadurch entstanden gedacht wird, dass $d = e = f = c$ geworden ist. Man kann hier die Verzweigungsschnitte auch noch auf eine dritte Art wählen, indem man einen solchen von a nach 0, und einen zweiten von 0 nach b zieht.

3) Die Function

$$f(z) = \sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$$

geht in

$$\varphi(u) = \sqrt[3]{\frac{(1-au)(1-bu)}{u^2}}$$

über, daher ist $z = \infty$ ein Verzweigungspunct. Man kann hier einen Verzweigungsschnitt von a nach ∞ und einen zweiten von b nach ∞ legen (Fig. 19), und die Blätter so zusammenhängen lassen, wie die Figur andeutet. Ein Umkreisen des Puncts ∞ führt dann zuerst über $b\,\infty$ von 1 nach 2, und dann über $a\,\infty$ von 2 nach 3, also bei einem Umlaufe von 1 nach 3, sodass die Function sich ändert, und $z = \infty$ wirklich als Verzweigungspunct auftritt. Man bemerke dabei, dass wenn die Bewegungsrichtung auch hier die der wachsenden Winkel sein soll, die Umkreisung

von ∞ aus gesehn in entgegengesetzter Richtung stattfinden muss. Denn setzt man

$$u = r\,(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

so folgt

$$z = \frac{1}{r}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

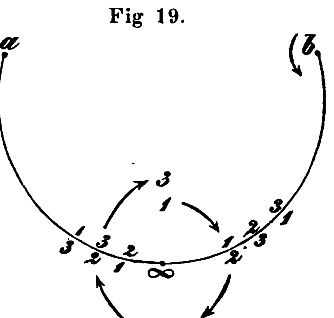


Fig 19.

Beschreibt also u einen Kreis um den Nullpunct mit kleinem Radius und in der Richtung der abnehmenden Winkel, so beschreibt z einen Kreis mit grossem Radius und in der Richtung der wachsenden Winkel. In diesem Falle geht $\varphi(u)$ bei einem Umlauf in $\alpha^2\varphi(u)$, also auch $f(z)$ in $\alpha^2 f(z)$ über, d. h. man kommt aus 1 nach 3, wie es die Figur zeigt.

Man kann auch hier die Puncte a und b durch einen im Endlichen verlaufenden Verzweigungsschnitt verbinden, darauf einen Scheidungspunct c annehmen und von diesem einen zweiten Verzweigungsschnitt nach ∞ ziehen (Fig. 20). Auch dann ändert sich die Function beim Umkreisen des Punctes c nicht.

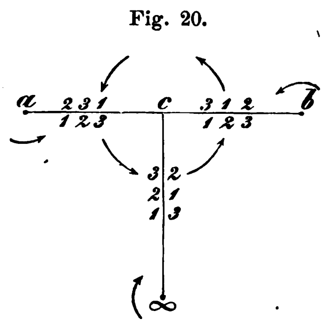


Fig. 20.

§ 15.

Bedeutet w eine mehrdeutige Function von z, W aber eine rationale Function von w und z (oder auch von w allein), so ist die z-Fläche für die Functiou W ebenso beschaffen, wie für die Function w. Denn bezeichnet man mit $w_\varkappa$ und w_λ irgend zwei demselben z zugehörige Werthe von w, mit $W_\varkappa$ und W_λ die entsprechenden Werthe von W, so muss $W_\varkappa$ in W_λ übergehen, so oft $w_\varkappa$ in w_λ übergeht, weil jedem Werthenpaare von z und w nur ein einziger Werth von W entspricht. Die Uebergänge der W-Werthe hängen daher in derselben Weise von den von z durchlaufenen Umkreisungen ab, wie die w-Werthe. Daher hat die z-Fläche für W dieselben Verzweigungspuncte und Verzweigungsschnitte wie für w, und in jedem Verzweigungspuncte hängen

auch die nämlichen Blätter zusammen. Aus diesem Grunde nennt *Riemann* alle rationalen Functionen von w und z ein System gleichverzweigter Functionen.

Vierter Abschnitt.

Integrale mit complexen Variabelen.

---

§ 16.

Man kann das bestimmte Integral von einer Function einer complexen Veränderlichen genau in derselben Weise definiren, wie dies bei reellen Variablen geschieht.

Es seien z_0 und z irgend zwei complexe Werthe der Variablen z. Man denke sich die Puncte, welche diese beiden Werthe repräsentiren, durch eine beliebige ununterbrochene Linie verbunden und nehme auf derselben eine Reihe eingeschalteter Puncte an, welche den Werthen $z_1, z_2, \ldots z_n$ der Variablen entsprechen. Ist ferner $f(z)$ eine Function von z, und bildet man die Summe der Producte

$$f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots\ldots + f(z_n)(z - z_n),$$

so ist der Grenzwerth derselben, wenn die Anzahl der zwischen z_0 und z längs der beliebigen Linie eingeschalteten Werthe ins Unendliche zunimmt, die Differenzen $z_1 - z_0$, $z_2 - z_1$, etc. also ins Unendliche abnehmen, das bestimmte Integral zwischen den Grenzen z_0 und z, also

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \lim\,[f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots\ldots + f(z_n)(z - z_n)].$$

Man sieht, dass diese Definition von der gewöhnlich bei reellen Variablen gegebenen in nichts Wesentlichem verschieden ist. Ein Unterschied besteht allerdings darin, dass, wie es die Natur einer complexen Veränderlichen erfordert, der Weg, den dieselbe zwischen der unteren und der oberen Grenze durchläuft, d. h. die Reihe der dazwischen liegenden Werthe, nicht vorgeschrieben ist, sondern durch jede ununterbrochene Linie gebildet werden kann.

Von dieser Linie, welche der **Integrationsweg** genannt wird, ist das Integral durchaus abhängig.

Aus der Definition folgen unmittelbar folgende zwei Sätze:

1) Bedeutet z_k irgend einen der von der Variablen durchlaufenen Werthe, so ist

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_k} f(z)\,dz + \int_{z_k}^{z} f(z)\,dz,$$

2) Es ist

$$\int_{z}^{z_0} f(z)\,dz = -\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz,$$

d. h. durchläuft die Variable die Linie, welche die stetige Aufeinanderfolge ihrer Werthe darstellt, in umgekehrter Richtung, so erhält das Integral den entgegengesetzten Werth.

Man kann ferner zeigen, dass, wie auch immer der Integrationsweg beschaffen sein mag, das Integral

$$w = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

stets eine Function der oberen Grenze z ist. Denn setzt man

$$z = x + iy \qquad z_0 = x_0 + iy_0$$

und nimmt an, der Integrationsweg sei durch irgend eine Beziehung zwischen x und y

$$\varphi(x, y) = 0,$$

aus welcher

$$y = \psi(x) \qquad \text{und} \quad x = \lambda(y)$$

folge, gegeben, so hat man

$$w = \int_{x_0 + iy_0}^{x + iy} f(x + iy)(dx + idy).$$

Dies Integral zerlegt sich in zwei Theile; drückt man in dem einen alles durch x, in dem andern alles durch y aus, so kann man schreiben

$$w = \int_{x_0}^{x} f(x + i\psi(x))\,dx + i\int_{y_0}^{y} f(\lambda(y) + iy)\,dy.$$

Hierin kann nun auch die Function f auf die Form einer complexen Grösse gebracht werden, dadurch wird man auf lauter reelle Integrale geführt und dann folgt unmittelbar, dass man auf

die vorigen Integrale die bei reellen Integralen gültigen Differentiationsregeln anwenden kann. Alsdann erhält man

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f(x + i\psi(x)) = f(x + iy)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = if(\lambda(y) + iy) = if(x + iy)$$

Demnach ist $$\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x},$$

also (nach § 5) w eine Function von z. Aus dem zweiten der oben angeführten Sätze ergiebt sich dann, dass w auch als Function der unteren Grenze betrachtet werden kann. Da ferner (§ 5) $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x}$ ist, so folgt auch

$$\frac{dw}{dz} = f(z).$$

Dagegen darf der bei reellen Integralen gültige Satz, dass, wenn $F(z)$ eine Function bedeutet, deren Derivirte $= f(z)$ ist,

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z) - F(z_0)$$

gesetzt werden kann, nicht ohne Weiteres auf complexe Integrale übertragen werden, denn, wie schon bemerkt, hängt der Werth eines solchen nicht bloss von der oberen und unteren Grenze, sondern auch von der ganzen Reihe der dazwischen liegenden Werthe, d. h. von dem Integrationswege ab.

§ 17.

Um nun den Einfluss zu untersuchen, den der Integrationsweg auf den Werth des Integrales hat, beginnen wir mit folgender Betrachtung. Es sei

$$z = x + iy$$

die Variable, also x und y die rechtwinkligen Coordinaten des darstellenden Punctes. Hat man nun ein auf irgend eine Weise bestimmt begrenztes Flächenstück, welches aus einem oder auch aus mehreren Blättern bestehen kann, und bedeuten P und Q zwei reelle innerhalb des Flächenstückes überall endliche und stetige Functionen von x und y, so soll zunächst bewiesen werden, dass das auf das ganze Flächenstück ausgedehnte Flächenintegral

$$J = \int\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

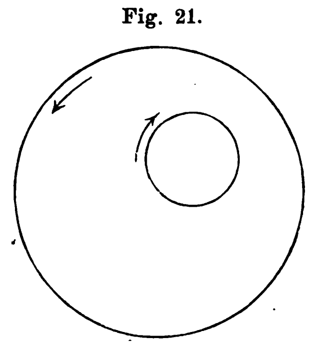
dem über die ganze Begrenzung des Flächenstücks erstreckten Linienintegral

$$\int (Pdx + Qdy)$$

gleich ist.

Wir werden diesen Satz nicht bloss für den einfachsten Fall beweisen, dass das Flächenstück nur aus einem einzigen Blatte besteht und von einer einzigen einfach in sich zurücklaufenden Linie begrenzt wird, sondern wir wollen auch gleich die Fälle mit berücksichtigen, in welchen die Begrenzung aus mehreren abgesonderten geschlossenen Linien besteht, die entweder ganz ausser einander liegen können, oder von denen eine oder mehrere von einer andern ganz umschlossen werden; endlich wollen wir auch den Fall nicht ausschliessen, dass das Flächenstück aus mehreren Blättern besteht, welche über die Verzweigungsschnitte hinüber in einander übergehen. Alsdann werden wir jedoch annehmen, dass das Flächenstück keine Verzweigungspuncte enthält, in denen die Functionen P und Q unendlich oder unstetig werden. Es muss nun aber, um alle diese Fälle zu umfassen, etwas Bestimmtes über den Sinn der Begrenzungsrichtung festgesetzt werden. Wenn wir, wie es üblich ist, annehmen, dass die positiven Richtungen der x- und y-Axe so liegen, dass ein im Nullpuncte stehender und nach der positiven Richtung der x-Axe hinblickender Beobachter die positive y-Axe zu seiner Linken sieht, so wollen wir die positive Begrenzungsrichtung so annehmen, dass jemand, der dieselbe in dieser Richtung durchläuft, das begrenzte Flächenstück stets an der linken Seite hat. Man kann dies auch so ausdrücken: In jedem Puncte der Begrenzung liegt die in das Innere des Flächenstücks gezogene Normale zur positiven Begrenzungsrichtung so, wie die positive y-Axe zur positiven x-Axe. Besteht z. B. die Begrenzung aus einer äusseren geschlossenen Linie und einem ganz innerhalb derselben liegenden Kreise, so dass die innerhalb dieses Kreises liegenden Puncte sich ausserhalb des begrenzten Flächenstücks befinden, so ist bei der äusseren Linie die positive Begrenzungs-

Fig. 21.



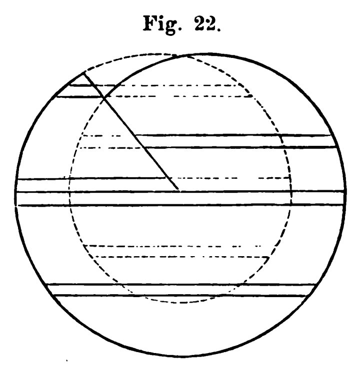
richtung die der wachsenden Winkel, bei dem kleinen Kreise dagegen die entgegengesetzte, wie es die Pfeile in Fig. 21 andeuten. Bei dem Linienintegrale nun, von welchem wir beweisen wollen, dass es dem angegebenen Flächenintegrale gleich ist, muss die Integration über die ganze Begrenzung in der eben erläuterten positiven Richtung erstreckt werden.

Wir schreiben das Integral J in der Form

$$J = \int\int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx dy - \int\int \frac{\partial P}{\partial y}\, dx dy,$$

und können dann in dem ersten Theile die Integration nach x, im zweiten Theile die nach y ausführen. Zu diesem Zwecke zerlegen wir für das erste Integral das Flächenstück in Elementarstreifen, welche durch einander unendlich naheliegende, der x-Axe parallel laufende Gerade gebildet werden, und im Falle Verzweigungspuncte vorhanden sind, tragen wir Sorge, dass durch jeden derselben eine solche Gerade hindurch gehe. Dadurch zerfällt das ganze Flächenstück in unendlich schmale trapezförmige Streifen. In Fig. 22 sind z. B. bei einer aus 2 Blättern bestehenden Fläche, welche durch eine einen Verzweigungspunct zweimal umgebende geschlossene Linie begrenzt ist, mehrere solcher trapezförmigen Stücke dargestellt, wobei die im zweiten Blatte verlaufenden Linien punctirt sind. Hebt man nun irgend einen, einem beliebigen Werthe von y angehörigen, dieser Elementarstreifen heraus, d. h. wenn die Fläche aus mehreren Blättern besteht, alle diejenigen in den verschiedenen Blättern unmittelbar unter einander liegenden Elementarstreifen, die demselben Werthe von y angehören, und bezeichnet die Werthe, welche die Function Q an denjenigen Stellen besitzt, wo der Elementarstreifen die Begrenzung durchschneidet, von links nach rechts gerechnet (d. h. in der Richtung der positiven x-Axe) an den Eintrittsstellen mit

Fig. 22.



$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3 \ldots.$$

und an den Austrittsstellen mit

$$Q',\ Q'',\ Q''',\ \ldots.$$

so ist (Fig. 23)

$$\int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx = -Q_1 + Q' - Q_2 + Q'' - \cdots\cdots, ^{*)}$$

also

$$\int\int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx dy = \int - Q_1\, dy + \int Q'\, dy + \int - Q_2 dy + \cdots\cdots$$

In den Integralen rechter Hand durchläuft y alle Werthe vom kleinsten bis zum grössten, dy ist also immer positiv zu nehmen. Bezeichnet man aber die Projectionen der durch die Elementarstreifen aus der Begrenzung herausgeschnittenen Bogenelemente auf die y-Axe, in derselben Reihenfolge wie oben genommen, an den Eintrittsstellen durch

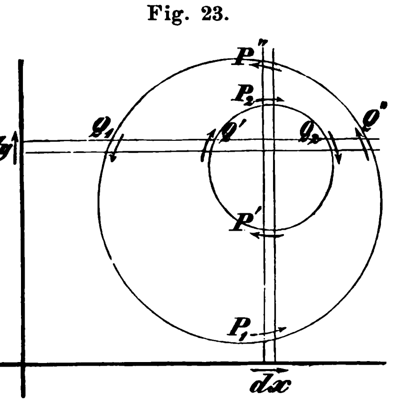


Fig. 23.

$$dy_1,\ dy_2,\ dy_3,\ \ldots\ldots,$$

und an den Austrittsstellen durch

$$dy',\ dy'',\ dy''' \ldots\ldots$$

---

*) Man bemerke dass diese Gleichung auch dann noch richtig bleibt, wenn $\frac{\partial Q}{\partial x}$ an irgend einer Stelle, über die sich die Integration erstreckt, unendlich oder unstetig wird, wenn nur Q an dieser Stelle keine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet. Ist nämlich $f(x)$ eine Function der reellen Variablen x, welche an einer Stelle $x = a$ stetig ist, während ihr Differentialquotient $f'(x)$ an dieser Stelle eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, so nehme man zu beiden Seiten von a zwei unendlich nahe an a liegende Werthe x_h und x_k an. Liegt dann in dem Integrale

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x)\, dx$$

a zwischen den Grenzen x_0 und x_1, und bleibt $f(x)$ zwischen denselben stetig, während $f'(x)$ nur an der Stelle $x = a$ unstetig ist, so kann man setzen

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx = \lim \left[\int_{x_0}^{x^h} f'(x)\, dx + \int_{x^k}^{x_1} f'(x)\, dx\right],$$

wo der Grenzübergang sich auf das Zusammenfallen von x_h und x_k mit

und nimmt auf die positive Begrenzungsrichtung Rücksicht, so ist (Fig. 23)

$$dy = -dy_1 = -dy_2 = -dy_3 = \cdots$$
$$= +dy' = +dy'' = +dy''' = \cdots,$$

folglich

$$\int\int \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int Q_1 dy_1 + \int Q' dy' + \int Q_2 dy_2 + \cdots\cdots.$$

Fig. 23.

In allen diesen Integralen verändert sich y im Sinne der positiven Begrenzungsrichtung, daher vereinigen sich alle zu einem einzigen, und man erhält

$$\int\int \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int Q dy,$$

wenn das letztere Integral auf die ganze Begrenzung in positiver Richtung erstreckt wird.

Ebenso kann man nun auch das zweite Integral

$$\int\int \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

behandeln. Hier zerlegt man das Flächenstück in Elementarstreifen durch gerade Linien, welche der y-Axe parallel laufen und lässt durch jeden Verzweigungspunct eine solche Gerade hindurch-

---

a bezieht. Da nun $f'(x)$ von x_0 bis x_h und von x_k bis x_1 stetig ist, so folgt

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x)\, dx = \lim\, [f(x_h) - f(x_0) + f(x_1) - f(x_k)],$$

und da $f(x)$ an der Stelle $x = a$ stetig ist, also beim Uebergang zur Grenze $f(x_h)$ und $f(x_k)$ einander gleich werden, oder

$$\lim\, [f(x_h) - f(x_k)] = 0$$

ist, so hat man trotz der Stetigkeitsunterbrechung von $f'(x)$ zwischen den Grenzen des Integrals doch

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x)\, dx = f(x_1) - f(x_0).$$

Dieser Fall ist hier mit zu berücksichtigen, da sich später zeigen wird, dass die Derivirten stetiger Functionen in den Verzweigungspuncten unendlich gross werden können (§ 39).

gehn. Bezeichnet man dann die Werthe, welche die Function P an den Stellen hat, wo ein Elementarstreifen die Begrenzung durchschneidet, diese Werthe der Reihe nach von unten nach oben (nämlich in der Richtung der positiven y-Axe) gerechnet, an den Eintrittsstellen mit

$$P_1, P_2, P_3, \dots.$$

und an den Austrittsstellen mit

$$P', P'', P''', \dots\dots,$$

so ist wieder

$$\int\int \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int P_1\, dx + \int P'\, dx - \int P_2\, dx + \cdots\cdots,$$

und darin ist dx positiv. Bezeichnen aber

$$dx_1,\ dx_2,\ dx_3, \dots. \text{ und } dx',\ dx'',\ dx''', \dots.$$

die Projectionen der herausgeschnittenen Bogenelemente, so ist mit Berücksichtigung der positiven Begrenzungsrichtung

$$dx = + dx_1 = + dx_2 = + dx_3 = \cdots\cdots$$

und daher $\quad = - dx' = - dx'' = - dx''' = \cdots\cdots$

$$\int\int \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int P_1\, dx_1 - \int P'\, dx' - \int P_2\, dx_2 - \cdots\cdot,$$
$$= -\int Pdx,$$

worin wieder das Integral auf die ganze Begrenzung in positiver Richtung auszudehnen ist. Setzt man nun beide Integrale zusammen, so folgt, was zu beweisen war,

$$\int\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int (Pdx + Qdy),$$

das Linienintegral auf die ganze Begrenzung in positiver Richtung erstreckt.

Dieser hierdurch für reelle Functionen P und Q bewiesene Satz kann sofort für den Fall erweitert werden, dass P und Q complexe Functionen der reellen Variablen x und y sind. Nämlich setzt man

$$P = P' + i P'' \qquad Q = Q' + i Q'',$$

worin P', P'', Q', Q'' reelle Functionen von x und y bedeuten, so ist

$$\int\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\int \left(\frac{\partial Q'}{\partial x} - \frac{\partial P'}{\partial y}\right) dxdy$$
$$+ i \int\int \left(\frac{\partial Q''}{\partial x} - \frac{\partial P''}{\partial y}\right) dxdy,$$

und wenn man den Satz auf die reellen Theile der rechten Seite anwendet,

$$= \int (P' \, dx + Q' \, dy) + i \int (P'' \, dx + Q'' \, dy)$$

$$= \int (Pdx + Qdy).$$

Wir haben bisher angenommen, dass innerhalb des betrachteten Flächentheils keine Verzweigungspuncte oder andere Puncte liegen, in denen P oder Q unstetig ist. Um nun auch solche Flächentheile mit in die Betrachtung hineinziehen zu können, haben wir nur nöthig, solche Puncte mit beliebig kleinen (wirklich) geschlossenen Linien zu umgeben und dadurch auszuschliessen, wobei dann diese Linien mit zu der Begrenzung des Flächentheils gehören.

§ 18.

I. Aus dem vorigen Satze folgt sogleich der folgende: Wenn $Pdx + Qdy$ ein vollständiges Differential ist, so ist das Integral $\int (Pdx + Qdy)$ ausgedehnt auf die ganze Begrenzung eines Flächenstücks, innerhalb dessen P und Q endlich und stetig sind, gleich Null. Denn wenn $Pdx + Qdy$ ein vollständiges Differential ist, so ist

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

also verschwinden alle Elemente des Flächenintegrals, welches dem Linienintegrale gleich ist, und folglich ist dieses wie jenes gleich Null.

Wenn nun $w = f(z)$

eine Function einer complexen Variablen $z = x + iy$ ist, so ist [§ 5. (1)]

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial (iw)}{\partial x},$$

folglich

$$wdx + iwdy \quad \text{d. h.} \quad w(dx + idy) \quad \text{oder } wdz$$

ein vollständiges Differential, und daher

$$\int f(z) \, dz = 0,$$

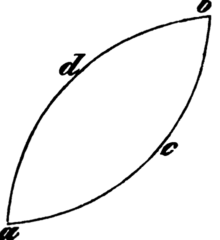
II. wenn dieses Integral über die ganze Begrenzung eines Flächenstücks ausgedehnt wird, innerhalb dessen $f(z)$ endlich und stetig ist.

Hieraus folgt weiter: Lässt man die Veränderliche z zwischen zwei Puncten a und b zwei verschiedene Wege acb und adb (Fig. 24) durchlaufen, welche zusammen eine geschlossene Linie

bilden, die für sich allein ein Flächenstück vollständig begrenzt, und ist innerhalb des so begrenzten Flächenstücks $f(z)$ endlich und stetig, so ist über die geschlossene Linie erstreckt

$$\int f(z)\, dz = 0.$$

Fig. 24.



Um ein auf einem bestimmten Wege genommenes Integral kurz zu bezeichnen, wählen wir den Buchstaben J und fügen demselben den Integrationsweg in Klammern hinzu, sodass z. B. das auf dem Wege acb genommene Integral $\int f(z)\, dz$ durch $J(acb)$ angedeutet wird. Dann kann man die letzte Gleichung schreiben

$$J(acbda) = 0.$$

Nun ist aber (§ 16)

$$J(acbda) = J(acb) + J(bda)$$

und

$$J(bda) = -J(adb),$$

also folgt

$$J(acb) = J(adb).$$

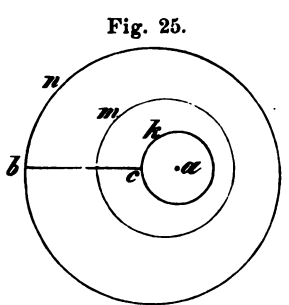
Das Integral $\int f(z)\, dz$ hat also auf zwei verschiedenen, dieselben Puncte verbindenden Wegen immer denselben Werth, wenn die beiden Wege zusammengenommen ein Flächenstück vollständig begrenzen, in welchem $f(z)$ endlich und stetig ist. } III.

Hat man nun ein zusammenhängendes Flächenstück, in welchem $f(z)$ endlich und stetig bleibt, von der Beschaffenheit, dass jede darin gezogene (wirklich) geschlossene Linie für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächentheils bildet, so hat das Integral $\int f(z)\, dz$ auf allen Wegen zwischen denselben zwei Puncten denselben Werth. Lässt man die untere Grenze z_0 constant sein, so ist also innerhalb eines solchen Flächenstückes das Integral eine einwerthige Function der oberen Grenze, und bezeichnet $F(z)$ eine Function, deren Derivirte $= f(z)$, so ist innerhalb jenes Flächenstücks $\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz = F(z) - F(z_0)$, da in diesem Falle der Werth des Integrals von dem Integrationswege unabhängig ist.

Es tritt hier die grosse Bedeutung hervor, welche solchen Flächen zukommt, in denen jede geschlossene Linie für sich allein

die vollständige Begrenzung eines Flächentheiles bildet. *Riemann* hat die Flächen von dieser Beschaffenheit mit dem Namen einfach zusammenhängende Flächen bezeichnet. Eine solche ist z. B. eine Kreisfläche. Ist in einer solchen $f(z)$ überall stetig, so ist, wie bemerkt, $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ in derselben eine einwerthige Function der oberen Grenze. Wenn dagegen $f(z)$ in einer Kreisfläche unendlich gross wird, z. B. nur in einem Puncte a, und umgiebt man diesen, um ein Flächenstück zu erhalten, in welchem $f(z)$ stetig bleibt, mit einem kleinen Kreise k, und schliesst den Punct a dadurch aus, so ist die so entstehende ringförmige Fläche (Fig. 25) nicht mehr einfach zusammenhängend; denn eine Linie m, welche den kleinen Kreis k ganz umschliesst, bildet für sich allein noch nicht die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, sondern erst m und k zusammen Demnach hat zwar das auf m und k zugleich erstreckte Integral den Werth Null, wenn aber das auf k allein ausgedehnte Integral nicht gleich Null ist, so kann auch das längs m genommene nicht Null sein. Innerhalb einer solchen Fläche, welche *Riemann* mehrfach zusammenhängend nennt, kann daher die Abhängigkeit des Integrals von dem Integrationswege bestehen bleiben und dann das Integral eine vieldeutige Function der oberen Grenze sein.*)

Fig. 25.



§ 19.

Wir lassen jetzt die Voraussetzung, dass die Function $f(z)$ in dem zu betrachtenden Flächenstücke überall stetig sei, fallen und gehen zur Untersuchung von Integralen über, deren Integrationswege Flächentheile begrenzen, in denen die Function nicht mehr überall stetig ist.

Wenn $f(z)$ in irgend einem Puncte eines Flächenstückes unendlich oder unstetig ist, so soll ein solcher Punct ein Unstetigkeitspunct genannt werden. Er kann zugleich ein Verzwei-

---

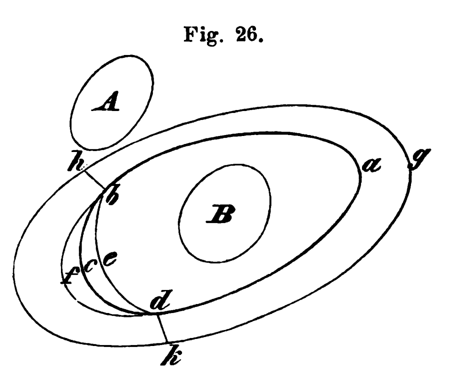
*) Siehe Abschnitt IX und X.

gungspunct sein oder auch nicht. Giebt es nun in einem Flächenstücke Unstetigkeitspuncte, so ist man nicht mehr in allen Fällen berechtigt zu schliessen, dass das über die ganze Begrenzung des Flächenstücks ausgedehnte Integral den Werth Null habe, weil der Beweis dieses Satzes wesentlich auf der Voraussetzung beruht, dass $f(z)$ innerhalb des Flächenstückes nicht unstetig wird. Aber man kann zeigen, dass, welchen Werth das Integral auch haben mag, es seinen Werth nicht ändert, wenn man das Flächenstück um beliebige Stücke vergrössert oder verkleinert, wenn nur $f(z)$ innerhalb der hinzugekommenen oder ausgeschiedenen Flächentheile endlich und stetig ist. IV. Denn wird erstlich ein hinzukommendes oder ausgeschiedenes Flächenstück selbst von einer Linie vollständig begrenzt, wie z. B. A oder B (Fig. 26, wo $abcda$ die ursprüngliche Begrenzung sei), so ist, wenn $f(z)$ innerhalb A und B stetig ist, das auf die Begrenzung von A oder B erstreckte Integral gleich Null; es kann daher die Begrenzung von A oder B beliebig der ursprünglichen Begrenzung hinzugefügt werden, ohne dass der Werth des Integrals sich ändert. Wird aber das hinzugekommene oder ausgeschiedene Flächenstück zum Theil von der ursprünglichen Begrenzung mit begrenzt, wie $bfdcb$ oder $bcdeb$, so ist

$$J(bfd) = J(bcd) = J(bed),$$

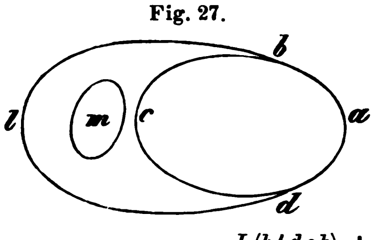
wenn $f(z)$ innerhalb jener Flächentheile stetig ist. Daher kann der Begrenzungstheil bcd beliebig durch bfd oder bed ersetzt werden, ohne dass das Integral seinen Werth ändert. Hieraus folgt weiter, dass man auch eine geschlossene Linie, welche entweder allein die Begrenzung eines Flächentheils bildet oder doch zu den Begrenzungsstücken eines solchen gehört, durch eine beliebige weitere oder engere geschlossene Linie ersetzen kann, wenn nur dadurch keine Flächentheile ein- oder austreten, in denen $f(z)$ unendlich oder unstetig wird, denn um z. B. $abcda$

Fig. 26.



in $ghkg$ zu erweitern, braucht man nur zuerst bcd durch $bhkd$ und dann dab durch $dkghb$ zu ersetzen. Endlich kann man auch ein Flächenstück $abcda$ (Fig. 27) durch ein ringförmiges Stück, das von der Linie $bldcb$ und der Linie m begrenzt wird, vergrössern, wenn nur die Function $f(z)$ in dem Ringe stetig bleibt, mag sie auch innerhalb m unstetig werden. Denn unter dieser Voraussetzung ist

Fig. 27.



$$J(bldcb) + J(m) = 0.$$

Setzt man also

$$J(dabcd) = S,$$

so ist auch

$$S = J(dabcd) + J(bldcb) + J(m)$$
$$= J(dab) + J(bcd) + J(bld) + J(dcb) + J(m)$$

und da

$$J(bcd) + J(dcb) = 0$$

ist, $$S = J(dab) + J(bld) + J(m)$$

oder $$S = J(dabld) + J(m).$$

In ähnlicher Weise lässt sich die Richtigkeit des Satzes in allen Fällen darthun. Ganz allgemein aber, auch für Flächenstücke, die aus mehreren Blättern bestehen, kann er so bewiesen werden. Wird eine beliebige Fläche T so in zwei Theile A und B getheilt, dass $f(z)$ in A stetig ist, und bezeichnet man das über die Begrenzung eines Theiles, z. B. A erstreckte Integral $\int f(z)dz$ durch $J(A)$, so ist

$$J(A) = 0.$$

Haben nun die Theile A und B keine gemeinschaftlichen Begrenzungsstücke, so bilden die Begrenzungen von A und B zusammen die Begrenzung von T und daher ist

$$J(T) = J(A) + J(B)$$

und folglich auch

$$J(T) = J(B).$$

Gehören dagegen gewisse Linien C sowohl zur Begrenzung von A, als auch zu der von B, so werden diese Linien, wenn man die Begrenzungen von A und B hinter einander in der positiven Richtung durchläuft, zweimal und zwar in entgegengesetzter Richtung durchlaufen; die längs C genommenen Integrale heben sich

daher auf; die übrigen Begrenzungstheile von A und B aber bilden die ganze Begrenzung von T, und daher hat man wieder

$$J(T) = J(A) + J(B)$$

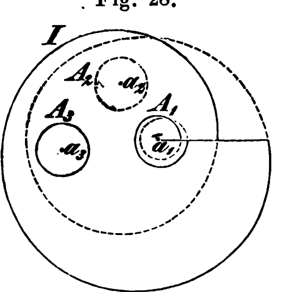
und folglich

$$J(T) = J(B).$$

Da nun hiernach der Theil A aus der Fläche T ausgeschieden werden kann, so kann auch umgekehrt eine Fläche B durch Hinzufügung einer Fläche A, in welcher die Function stetig bleibt, erweitert werden, ohne dass das Begrenzungsintegral sich ändert.

Hierauf stützt sich nun ein anderer wichtiger Satz. Bildet eine geschlossene Linie (I) für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, und wird die Function $f(z)$ innerhalb desselben in den Puncten $a_1, a_2, a_3, \cdots$ unstetig, so umgebe man jeden einzelnen dieser Puncte mit einer beliebig kleinen geschlossenen Linie, z. B. mit einem kleinen Kreise, der aber, wenn einer dieser Unstetigkeitspuncte zugleich ein Verzweigungspunct ist, so viele Male durchlaufen werden muss, als Blätter in letzterem zusammenhängen. Alsdann bilden alle diese Kreise, die mit $(A_1), (A_2), (A_3), \cdots$ bezeichnet werden mögen, mit der äusseren Linie (I) zusammen die Begrenzung eines Flächenstückes, in welchem $f(z)$ stetig ist. (Fig. 28, wo die punctirten Linien im zweiten Blatte verlaufen). Folglich ist das auf diese ganze Begrenzung in positiver Richtung erstreckte Integral $\int f(z)\,dz$ gleich Null. Wird nun aber die äussere Linie (I) in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen, so müssen die kleinen Kreise $(A_1), (A_2), (A_3), \cdots$ in der Richtung der abnehmenden Winkel durchlaufen werden. Bezeichnet man daher die auf die Linien (I), $(A_1), (A_2), (A_3), \cdots$ in der Richtung der wachsenden Winkel erstreckten Integrale $\int f(z)\,dz$ resp. mit $I, A_1, A_2, A_3, \cdots$, so ist

Fig. 28.



$$I - A_1 - A_2 - A_3 \ldots = 0$$

und folglich

$$I = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots.$$

Befindet sich nun die Linie (I) in einem Flächenstücke T, welches keine anderen Unstetigkeitspuncte enthält, als die von ihr umschlossenen $a_1, a_2, a_3, \ldots$, so behält das Integral I nach

dem vorigen Satze seinen Werth, wenn es auf die Begrenzung von T ausgedehnt wird, und daher erhalten wir den Satz:

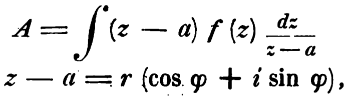
V. **Das Integral $\int f(z)\,dz$, ausgedehnt auf die ganze Begrenzung eines Flächenstücks T, ist gleich der Summe der Integrale längs kleiner geschlossener Linien, welche die sämmtlichen innerhalb T befindlichen Unstetigkeitspuncte einzeln umgeben, alle Integrale in derselben Richtung genommen.**

§ 20.

Durch die vorige Betrachtung sind wir nun auf die Untersuchung solcher geschlossener Integrationswege geführt worden, welche nur einen einzigen Unstetigkeitspunct umgeben. Dabei müssen wir aber unterscheiden, ob der Unstetigkeitspunct zugleich ein Verzweigungspunct ist, oder nicht. Betrachten wir zuerst einen Punct a, welcher nicht Verzweigungspunct ist, und in welchem $f(z)$ unendlich gross wird. Nimmt man das Integral

$$A = \int f(z)\,dz$$

längs einer diesen Unstetigkeitspunct umgebenden Linie, welche weder einen andern Unstetigkeitspunct noch auch einen Verzweigungspunct einschliesst, so kann diese durch einen kleinen Kreis um den Punct a mit dem Radius r ersetzt werden, welchen man auch ins Unendliche abnehmen lassen kann, ohne dass der Werth des Integrals sich ändert. Schreibt man dann

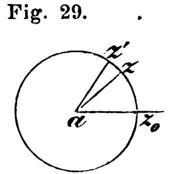


$$A = \int (z-a)\,f(z)\,\frac{dz}{z-a}$$

und setzt

$$z - a = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

Fig. 29.



so bleibt, wenn z den kleinen Kreis durchläuft, r constant, und φ wächst von 0 bis 2π. Dabei wird angenommen, dass der Punct z seine Bewegung aus dem Puncte z_0 beginne, in welchem eine aus a mit der positiven Hauptaxe parallel gezogene Gerade den Kreis durchschneidet (Fig. 29). Dies ist gestattet, da der Anfangspunct der Bewegung willkürlich gewählt werden kann. Um nun $\frac{dz}{z-a}$ durch r und φ auszudrücken, bemerke man mit *Riemann*,

dass dz einen von einem beliebigen Puncte z der Peripherie des Kreises ausgehenden unendlich kleinen Kreisbogen bedeutet, dessen Centriwinkel $= d\varphi$ ist. Bezeichnet man den Endpunct dieses unendlich kleinen Kreisbogens mit z', so ist

$$dz = z' - z \quad , \quad \frac{dz}{z-a} = \frac{z'-z}{z-a}.$$

Nun ist aber § 2. S. 20 gezeigt worden, dass

$$\frac{z'-z}{z-a} = \frac{\overline{zz'}}{\overline{az}} (-\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

ist, wo α den Winkel azz' bedeutet. Dieser ist in unserem Falle ein Rechter, also

$$\frac{dz}{z-a} = i\,\frac{\overline{zz'}}{\overline{az}}.$$

Die Linie $\overline{zz'}$ ist ein Kreisbogen mit dem Centriwinkel $d\varphi$, also $= rd\varphi$, $\overline{az}$ der Radius, also $= r$, folglich erhält man

$$\frac{dz}{z-a} = i\,\frac{rd\varphi}{r} = id\varphi.$$

Setzt man dies ein, so folgt

$$A = \int_0^{2\pi} (z-a)\,f(z)\,i\,d\varphi.$$

Lässt man jetzt den Radius r des Kreises ins Unendliche abnehmen, so nähern sich die Puncte z der Peripherie des Kreises dem Puncte a, $z - a$ also der Null, während $f(z)$ unendlich gross wird. Wenn nun der Fall eintritt, dass $f(z)$ für $z = a$ so unendlich wird, dass das Product $(z-a)\,f(z)$ sich einem bestimmten endlichen Grenzwerth p nähert, also

$$[\lim\,(z-a)\,f(z)]_{z=a} = p$$

ist, so folgt

$$A = \int_0^{2\pi} p\,i\,d\varphi = 2\pi i p,$$

und dadurch ist der Werth des Integrales durch den Grenzwerth von $(z-a)\,f(z)$ ausgedrückt, wenn derselbe ein endlicher und bestimmter ist. Dieser Werth von A ändert sich nach IV nicht, wenn die Integration auf die vollständige Begrenzung eines Flächentheils ausgedehnt wird, innerhalb dessen keine Verzweigungspuncte und keine Unstetigkeitspuncte ausser a sich befinden.

Als Beispiel diene

$$\int \frac{dz}{1+z^2}.$$

Hier ist

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)},$$

welches für $z = i$ unendlich wird, ohne dass dieser Punct ein Verzweigungspunct ist (die Function $\frac{1}{1+z^2}$ hat überhaupt keine Verzweigungspuncte). Ferner ist

$$p = \left[\lim \frac{z-i}{1+z^2}\right]_{z=i} = \left[\lim \frac{1}{z+i}\right]_{z=i} = \frac{1}{2i},$$

also

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \pi,$$

das Integral auf eine den Punct i umgebende geschlossene Linie in der Richtung der wachsenden Winkel ausgedehnt.

Liegen nun in einem Flächenstücke T zwar keine Verzweigungspuncte, wohl aber die Unstetigkeitspuncte a_1, a_2, a_3, etc., und wird $f(z)$ in diesen Puncten so unendlich, dass die Producte $(z - a_1) f(z)$, $(z - a_2) f(z)$, etc. sich bestimmten endlichen Grenzwerthen p_1, p_2, etc. nähern, sodass

$$[\lim (z - a_1) f(z)]_{z=a_1} = p_1$$

$$[\lim (z - a_2) f(z)]_{z=a_2} = p_2$$

etc.

ist, so erhält man für das auf die ganze Begrenzung von T erstreckte Integral $\int f(z)\, dz$ den Werth (V. § 19)

$$\int f(z)\, dz = 2\pi i\, (p_1 + p_2 + p_3 + \cdots\cdots).$$

In dem vorigen Beispiele wird

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

auch für $z = -i$ unendlich gross, und für diesen Punct erhält man

$$p_2 = \left[\lim \frac{z+i}{1+z^2}\right]_{z=-i} = \left[\lim \frac{1}{z-i}\right]_{z=-i} = -\frac{1}{2i},$$

also auf eine den Punct $-i$ umgebende Linie erstreckt

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = -\pi.$$

Für eine Linie, welche beide Puncte $+i$ und $-i$ in der Richtung der wachsenden Winkel umgiebt, wird daher dieses Integral $= \pi - \pi = 0$.

Vermittelst solcher geschlossener Linien, die nur einen einzigen Unstetigkeitspunct umgeben, kann man nun innerhalb eines

Flächentheils, der keine Verzweigungspuncte der Function $f(z)$ enthält, die für verschiedene Integrationswege geltenden Werthe der Integrale auf einander beziehen. Wenn zwei Wege bec und bdc (Fig. 10) nur einen Unstetigkeitspunct a und keinen Verzweigungspunct einschliessen, so kann der eine, z. B. bdc dadurch ersetzt werden, dass man dem anderen bec eine den Unstetigkeitspunct umgebende geschlossene Linie $bghb$ vorangehen lässt. Denn nach IV. § 19 ist

$$J(bghb) = J(bdceb) = J(bdc) - J(bec)$$

also $\quad J(bdc) = J(bghb) + J(bec)$

oder auch $J(bec) = -J(bghb) + J(bdc)$

$$= J(bhgb) + J(bdc).$$

Fig. 10.

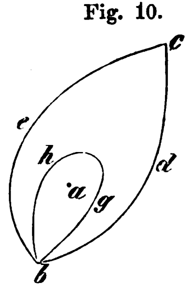
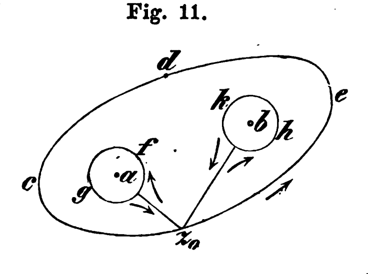


Fig. 11.



Ebenso verhält es sich, wenn zwei Wege mehrere Unstetigkeitspuncte, aber keine Verzweigungspuncte einschliessen. Umgeben z. B. die Wege z_0ed und z_0cd (Fig. 11) zwei Unstetigkeitspuncte a und b, so ziehe man aus z_0 um jeden derselben eine geschlossene Linie z_0fgz_0 und z_0hkz_0. Dann ist

$$J(z_0fgz_0) + J(z_0hkz_0) = J(z_0edcz_0)$$
$$= J(z_0ed) - J(z_0cd)$$

also $\quad J(z_0ed) = J(z_0fgz_0) + J(z_0hkz_0) + J(z_0cd)$.

Man kann daher den einen Weg dadurch ersetzen, dass man dem andern geschlossene Linien um je einen der Unstetigkeitspuncte vorhergehen lässt.

Wie sich das Integral A um einen Unstetigkeitspunct a verhält, wenn darin $(z - a)f(z)$ nicht mehr einen endlichen Grenzwerth hat, kann erst später (Abschnitt VIII.) bestimmt werden.

§ 21.

Wir gehen nun zu dem Falle über, dass der Unstetigkeitspunct zugleich ein Verzweigungspunct ist, in welchem Falle er

mit b, und der Integralwerth für eine um ihn gelegte Linie mit B bezeichnet werden soll; wir nehmen an, dass in diesem Puncte m Blätter der Fläche zusammenhängen. Will man hier eine geschlossene Linie haben, die den Punct b umgiebt, so muss dieselbe m Umläufe um b machen, also z. B. die Peripherie eines Kreises m Mal durchlaufen werden. *Riemann* führt für diesen Fall statt z eine neue Variable ζ ein, indem er setzt

$$\zeta^m = z - b,$$

welche also für $z = b$ den Werth 0 erhält, und untersucht, wie sich die Function $f(z)$ als Function von ζ betrachtet, an der Stelle $\zeta = 0$ verhält. Zu diesem Ende sehen wir zuerst zu, welche Linie ζ beschreibt, während z einen geschlossenen Kreis, d. h. also m Umläufe um einen solchen zurücklegt. Setzt man wieder

$$z - b = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

also

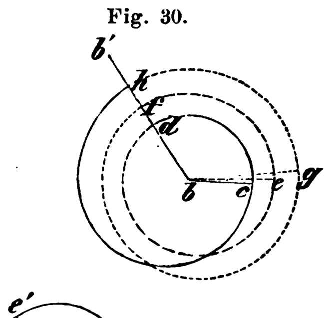
$$\zeta = r^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{1}{m}\varphi + i\sin\frac{1}{m}\varphi\right)$$

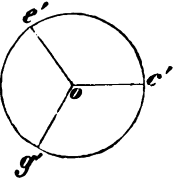
so bleibt r, also auch $r^{\frac{1}{m}}$ constant, und daher beschreibt ζ ebenfalls einen Kreis und zwar um den Nullpunct. Hat aber z einen Umlauf vollendet, sodass φ von 0 bis 2π gewachsen ist, so ist $\frac{1}{m}\varphi$ von 0 bis $\frac{2\pi}{m}$ gewachsen, also hat ζ den $m$ten Theil der Peripherie zurückgelegt. Bei dem zweiten Umlaufe des z beschreibt ζ auf's Neue einen $m$ten Theil der Peripherie, und ebenso bei jedem neuen Umlaufe des z. Hat z daher m Umläufe gemacht und ist auf seinen Ausgangspunct zurückgekommen, so hat ζ die ganze Peripherie des Kreises gerade einmal durchlaufen. Den m Flächentheilen, welche von dem Radius r während jedes Umlaufes überstrichen werden, entsprechen also m Kreissectoren, jeder mit dem Centriwinkel $\frac{2\pi}{m}$. Diese fügen sich an einander und bilden zusammen eine einfache Kreisfläche. In Fig. 30. ist angenommen, dass in dem Puncte b drei Blätter zusammenhängen, welche über den Verzweigungsschnitt bb' hinüber in einander übergehen. Die in den drei Blättern verlaufenden Kreislinien sind der Deutlichkeit wegen neben einander gezeichnet, und die im 1sten, 2ten und 3ten Blatte verlaufenden Linien resp. durch eine ausgezogene Linie, durch Striche und durch Puncte bezeichnet worden. Dann entspricht

der Fläche cde der Kreissector $c'oe'$
„ „ efg „ „ $e'og'$
„ „ ghc „ „ $g'oc'$,

dem ganzen von der geschlossenen Linie $cdefghc$ begrenzten Flächentheile entspricht daher die einfache Kreisfläche $c'e'g'c'$. Es ergiebt sich also, dass, während z, alle m Blätter durchlaufend, erst nach m Umläufen zu seinem Ausgangspuncte zurückkommt, dies bei ζ schon nach dem ersten Umlaufe eintritt. Die Variable ζ tritt daher aus ihrem ersten Blatte nicht heraus, und folglich hat die Function $f(z)$ als Function von ζ betrachtet an der Stelle $\zeta = 0$ keinen Verzweigungspunct. Wenn wir demnach in dem Integrale $\int f(z)\,dz$ ausgedehnt auf eine geschlossene Linie, welche den Verzweigungs- und Unstetigkeitspunct b umgiebt, ζ als Variable einführen, so können wir die Betrachtung des vorigen § anwenden, weil $\zeta = 0$ kein Verzweigungspunct, sondern ein blosser Unstetigkeitspunct ist. Es gehe nun durch

Fig. 30.





die Substitution von $\zeta = (z-b)^{\frac{1}{m}}$ die Function $f(z)$ in $\varphi(\zeta)$ über; dann wird, weil $dz = m\,\zeta^{m-1}d\zeta$, ist,

$$B = m\int \zeta^{m-1}\,\varphi(\zeta)\,d\zeta = m\int \zeta^{m}\,\varphi(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Setzt man der Kürze wegen $\frac{1}{m}\,\varphi = \psi$, also $\zeta = r^{\frac{1}{m}}(\cos\psi + i\sin\psi)$, so wächst bei dem ganzen Umlaufe ψ von 0 bis 2π, und da wie oben $\frac{d\zeta}{\zeta} = i d\psi$ ist, so erhält man

$$B = m\int_0^{2\pi} \zeta^{m}\,\varphi(\zeta)\,i\,d\psi.$$

Nun ist der Annahme nach $\varphi(\zeta)$ für $\zeta = 0$ unendlich gross. Geschieht dies Unendlichwerden aber so, dass eins der Producte

$$\zeta\,\varphi(\zeta),\ \zeta^2\varphi(\zeta),\ \ldots\ldots,\ \zeta^{m-1}\varphi(\zeta)$$

sich einem endlichen Grenzwerthe nähert, so ist

$$[\lim \zeta^m \varphi(\zeta)]_{\zeta=0} = 0.$$

Lässt man also den Radius r der um den Punct b beschriebenen Kreislinien ins Unendliche abnehmen, so wird dann

$$B = \int f(z)\, dz = 0.$$

Kehren wir nun wieder zur Variablen z zurück, so erhalten wir den Satz: **Wenn das Integral $\int f(z)\,dz$ auf eine geschlossene Linie ausgedehnt wird, die einen Unstetigkeitspunct umgiebt, der zugleich ein Verzweigungspunct ist, in welchem m Blätter der Fläche zusammenhängen, so hat dasselbe immer den Werth Null, wenn eins der Producte**

$$(z-b)^{\frac{1}{m}} f(z),\ (z-b)^{\frac{2}{m}} f(z), \ldots .\ (z-b)^{\frac{m-1}{m}} f(z)$$

sich einem endlichen Grenzwerthe nähert.

Als Beispiel diene

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Hier ist

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

welches für $z = 1$ unendlich wird. Dieser Punct ist zugleich ein Verzweigungspunct, in welchem zwei Blätter zusammenhängen. Man setze daher

$$\zeta^2 = z - 1$$

und erhält

$$f(z) = \varphi(\zeta) = \frac{1}{i\zeta\sqrt{(2+\zeta^2)(1-k^2(1+\zeta^2)^2)}},$$

sodass in der That $\zeta = 0$ kein Verzweigungspunct für $\varphi(\zeta)$ ist. Nun erhält man

$$\lim\left[(z-1)^{\frac{1}{2}} f(z)\right]_{z=1} = \left[\lim \frac{1}{i\sqrt{(z+1)(1-k^2z^2)}}\right]_{z=1} = \frac{1}{i\sqrt{2(1-k^2)}},$$

folglich ist

$$[\lim (z-1) f(z)]_{z=1} = 0$$

und daher auch

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 0,$$

wenn das Integral längs einer den Punct $z = 1$ umgebenden geschlossenen Linie genommen wird. Denselben Werth hat das Integral auch, wenn die geschlossene Linie einen der drei anderen Verzweigungspuncte -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ umgiebt.

Die Untersuchung, welchen Werth das Integral B hat, wenn die Voraussetzungen des vorigen Satzes nicht erfüllt sind, kann erst später (Abschnitt VIII) vorgenommen werden.

Fünfter Abschnitt.

Der Logarithmus und die Exponentialfunction.

---

§ 22.

Da wir in der Folge von einigen Eigenschaften des Logarithmus Gebrauch zu machen genöthigt sein werden, so müssen wir für einen Augenblick die allgemeinen Betrachtungen unterbrechen und uns zuerst mit dieser speciellen Function beschäftigen. Dabei erscheint es nicht unzweckmässig, diese Untersuchung etwas vollständiger zu führen, als es für die beabsichtigte Anwendung nothwendig gewesen wäre, und auch gleich daran die Betrachtung der aus dem Logarithmus folgenden Exponentialfunction anzuschliessen. Da wir es hier alsdann mit einem speciellen Falle der in den Abschnitten IX und X anzustellenden allgemeinen Untersuchungen zu thun haben, so kann dies Beispiel auch dazu dienen, für jene späteren Betrachtungen die Vorstellungen zu fixiren.

Wir bezeichnen nach *Riemann* mit dem Namen Logarithmus jede Function $f(z)$, welche die Eigenschaft hat, dass

$$f(z.u) = f(z) + f(u) \tag{5}$$

ist. Dadurch ist die Function bis auf eine Constante vollständig bestimmt, denn wir werden daraus alle ihre Eigenschaften ableiten können. Setzt man zuerst $u = 1$ und lässt z beliebig, so folgt

$$f(z) = f(z) + f(1)$$

also

$$f(1) = \text{Log } 1 = 0.$$

Setzt man aber $u = 0$, so erhält man

$$f(0) = f(z) + f(0);$$

giebt man nun dem z einen Werth, für welchen $f(z)$ nicht gleich Null ist, so folgt

$$f(0) = \text{Log } 0 = \infty;$$

aus demselben Grunde wird auch Log ∞ unendlich gross. Man kann ferner den Logarithmus durch ein Integral ausdrücken. Denn differentiirt man die Gleichung (5) partiell nach u, so folgt

$$z f'(zu) = f'(u),$$

und wenn man dann $u = 1$ setzt

$$z f'(z) = f'(1).$$

Die Constante $f'(1)$ bezeichnen wir mit m. Von dieser Constanten hängt der Werth des Logarithmen einer Zahl ab. Die Logarithmen aller Zahlen, die man erhält, wenn man der Constanten m einen bestimmten Werth beilegt, bilden zusammen ein Logarithmensystem, und man nennt die Constante m den Modulus dieses Logarithmensystems.

Aus der Gleichung

$$z f'(z) = m$$

folgt nun

(6) $$d f(z) = d \text{ Log } z = m \frac{dz}{z},$$

also

$$f(z) = m \int \frac{dz}{z} + C.$$

Da $f(1) = 0$ ist, so erhält die Constante C den Werth Null, wenn man dem Integral die untere Grenze 1 zuertheilt und z reelle Werthe durchlaufen lässt. Wir setzen daher auch im Allgemeinen

$$\text{Log } z = m \int_1^z \frac{dz}{z}$$

und haben damit den Logarithmus durch eine bestimmtes Integral ausgedrückt. Für die Analysis sind die Logarithmen desjenigen Systems die einfachsten, in welchem die Constante m den Werth 1 hat. Diese nennt man natürliche Logarithmen, und wir werden im Folgenden solche unter dem Zeichen log z verstehen. Dann ist also

$$\log z = \int_1^z \frac{dz}{z},$$

und daher

$$\text{Log}\, z = m . \log z.$$

Setzt man

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so erhält man

$$\begin{aligned} dz &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)\, dr + r(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\, d\varphi \\ &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(dr + i\, r\, d\varphi), \end{aligned}$$

also

$$\frac{dz}{z} = \frac{dr}{r} + i\, d\varphi.$$

Geht nun z auf irgend einem Wege von 1 nach einem beliebigen Puncte z, so durchläuft r die reellen Werthe von 1 bis r, und φ von 0 bis φ, daher ist

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \int_1^r \frac{dr}{r} + i\,\varphi$$

oder

$$\log z = \log r + i\,\varphi. \tag{7}$$

Hierdurch ist $\log z$ auf die Form einer complexen Grösse gebracht, denn da r in dem Integral $\int_1^r \frac{dr}{r}$ nur reelle und positive Werthe annimmt, so ist auch $\log r$ reell; und man sieht zugleich, dass $\log r$ positiv oder negativ ist, je nachdem r grösser oder kleiner als 1 ist; denn da r immer positiv ist, so bewegt sich der darstellende Punct auf der positiven Hauptaxe im ersten Falle nach der positiven, im letzteren Falle nach der negativen Seite, und daher sind im ersteren Falle alle Elemente $\frac{dr}{r}$ positiv, im letzteren alle negativ.

Wir ersehen ferner, dass der Logarithmus von dem Integrationswege abhängig ist; denn bezeichnet φ den Werth, den dieser Winkel erreicht, wenn z auf einer den Nullpunct nicht umwindenden Linie, bei welcher die Winkel wachsen, von 1 nach z geht, so ist $\varphi - 2\pi$ der Werth, den dieser Winkel annimmt, wenn die Linie auf der anderen Seite des Nullpuncts, also in der Richtung der abnehmenden Winkel von 1 nach z führt; und wird der Nullpunct von einer Linie n Mal in der Richtung

der wachsenden Winkel umwunden, so erreicht φ in z den Werth $\varphi + 2n\pi$. Demnach ist vollständig

$$\log z = \log r + i\varphi \pm 2n\pi i.$$

Hierdurch bestätigen sich unsere allgemeinen Betrachtungen. Die Function $\frac{1}{z}$ hat keinen Verzweigungspunct, dagegen den Unstetigkeitspunct $z = 0$. Lässt man z eine geschlossene Linie um den Nullpunct beschreiben, so ist der Werth des auf diese Linie in der Richtung der wachsenden Winkel erstreckten Integrals $= 2\pi i$, weil

$$p = \left[\lim z \frac{1}{z}\right]_{z=0} = 1$$

ist (§ 20). Durch die am Schlusse des § 20 angestellten Betrachtungen erhält man dasselbe Resultat wie oben.

Hieraus folgt nun, dass die Function $\log z$ in keinem Puncte der Ebene einen völlig bestimmten Werth hat und in irgend zwei unendlich nahen Puncten durch passende Anordnung des Integrationsweges Werthe erhalten kann, die um ein Vielfaches von $2\pi i$ von einander verschieden sind. Um diese Unbestimmtheit so viel als möglich zu beschränken, denke man sich aus dem Nullpuncte eine ins Unendliche verlaufende Linie oq (Fig. 31) gezogen, welche sich selbst nicht schneidet. Eine solche Linie wird nach *Riemann* ein Querschnitt genannt. Dann muss von je zwei von 1 nach z führenden Wegen, welche den Nullpunct einschliessen, der eine nothwendig den Querschnitt durchschneiden, und folglich nimmt $\log z$ auf allen den Querschnitt nicht überschreitenden Wegen in jedem Puncte z einen einzigen ganz bestimmten Werth an, der sich auch mit z überall stetig ändert. Nur auf den Puncten des Querschnitts selber bleibt die Unbestimmtheit bestehen. Bezeichnet man nun die unendliche Ebene, in welcher z sich bewegt, mit T, und denkt dieselbe längs des Querschnittes oq wirklich durchgeschnitten, so entsteht eine Fläche, die mit T' bezeichnet werden möge. Innerhalb dieser kann nun der Querschnitt nicht überschritten werden, und daher ist $\log z$ innerhalb T' eine einwerthige überall stetige Function von z. In der Fläche T dagegen wird $\log z$ beim Ueberschreiten des Querschnittes unstetig. Denn sind z_1 und z_2 zwei zu

Fig. 31.

beiden Seiten des Querschnittes unendlich nahe an einander liegende Puncte (z_1 etwa rechts und z_2 links von der Richtung oq), und lässt man z von 1 aus über z_1 und z_2 eine geschlossene Linie um den Nullpunct beschreiben, so ist

$$J(1\, z_1\, z_2\, c\, 1) = J(1\, z_1) - J(1\, c\, z_2) = 2\pi i.$$

Bezeichnen also w_1 und w_2 die Werthe, welche $\log z$, zunächst in T' betrachtet, in z_1 und z_2 annimmt, sodass

$$w_1 = J(1\, z_1) \qquad w_2 = J(1\, c\, z_2)$$

ist, so hat man

$$w_1 - w_2 = 2\pi i.$$

Denkt man sich also nun die Fläche T wieder hergestellt, so springt $\log z$, wenn z von z_1 nach z_2 geht, plötzlich von w_1 in $w_1 - 2\pi i$, oder wenn z von z_2 nach z_1 geht, plötzlich von w_2 nach $w_2 + 2\pi i$ über. Dieses gilt, an welcher Stelle die geschlossene Linie den Querschnitt auch überschreiten mag. Längs des ganzen Querschnittes ist daher $\log z$ unstetig, und zwar sind für alle Puncte auf der rechten Seite desselben die Werthe von $\log z$ um $2\pi i$ grösser als auf der linken. Dieser constante Werth, um welchen alle Functionswerthe auf der einen Seite grösser sind, als die benachbarten auf der andern Seite, heisst nach *Riemann* der Periodicitätsmodul der Function oder des Integrals, insofern erstere durch ein Integral dargestellt ist.

§ 23.

Aus dem Logarithmus leitet sich die Exponentialfunction in folgender Art ab. Unter dem Zeichen

$$a^w$$

soll eine Function von w verstanden werden, für welche

$$\log(a^w) = w . \log a$$

ist. Bezeichnet nun e die reelle Zahl, für welche $\log e$ den Werth 1 hat, ist also e durch die Gleichung

$$\int_1^e \frac{dz}{z} = 1$$

definirt, so hat man

$$\log(e^w) = w.$$

Daher ist e^w die inverse Function des Logarithmus, denn für $e^w = z$ folgt nun $w = \log z$. Eigentlich ist zwar $\log e$ nicht bloss $= 1$, sondern auch $= 1 \pm 2n\pi i$; man berücksichtigt aber

nur den ersteren Werth, d. h. man lässt in dem vorstehenden Integrale z nur reelle Werthe durchlaufen. Aus der Gleichung (6)

$$\frac{d \log z}{dz} = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}$$

folgt nun

$$\frac{dz}{dw} = z,$$

also

(8) $$\frac{de^w}{dw} = e^w.$$

Nimmt man für z eine complexe Grösse, welche den Modul 1 hat, setzt man also

$$z = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

so hat man in der Gleichung (7)

$$\log z = \log r + i\varphi$$

$r = 1$ und daher $\log r = 0$ zu setzen. Demnach ist

$$\log (\cos \varphi + i \sin \varphi) = i\varphi$$

und folglich

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

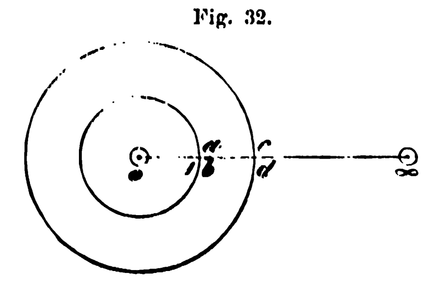
Die Exponentialfunction ist periodisch, denn da einem Werthe von z nicht bloss der Werth w, sondern auch die Werthe $w \pm 2n\pi i$ angehören, so ist

$$z = e^{w} = e^{w \pm 2n\pi i},$$

also ändert sich e^w nicht, wenn w um ein Vielfaches des Periodicitätsmoduls $2\pi i$ vermehrt oder vermindert wird.

Versuchen wir nun, die Fläche T' der z auf einer Ebene W' der w abzubilden. Wir nehmen dazu am einfachsten als Querschnitt eine durch 0 und 1 gehende Gerade an (Fig. 32).

Fig. 32.



Nun ist

$$w = \log r + i\varphi,$$

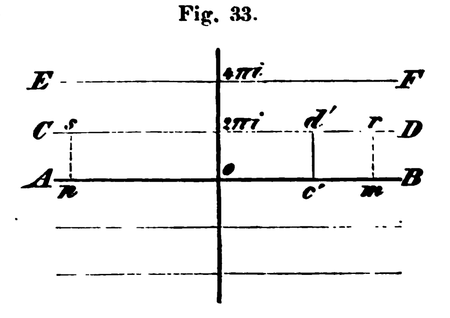
wenn

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

gesetzt wird. Daher sind $\log r$ und φ die rechtwinkligen Coordinaten des Punctes w. Lassen wir dann z einen Kreis mit dem Radius 1 um den Nullpunct in der Richtung der wachsenden Winkel von a nach b beschreiben, so ist $\log r = 0$, und folglich ist w

rein imaginär und geht auf der y-Axe von 0 bis $2\pi i$ (Fig. 33). Geht man ferner mit z von a längs der linken Seite des Querschnittes ins Unendliche, so bleibt $\varphi = 0$ und $\log r$ geht von 0 durch die positiven Werthe ins Unendliche, also beschreibt w den positiven Theil der Hauptaxe. Geht aber z von a auf der linken Seite des Querschnittes nach 0, so beschreibt w den negativen Theil der Hauptaxe ins Unendliche. Ist z zuerst um den Nullpunct herum nach b auf die rechte Seite des Querschnitts gelangt und geht dann längs der rechten Seite desselben nach ∞ oder nach 0, so ist w zuerst auf der y-Axe von 0 bis $2\pi i$ gegangen und beschreibt dann, da nun φ constant $= 2\pi$ bleibt, eine der Hauptaxe parallele Gerade, einmal nach der positiven und dann nach der negativen Richtung. Den beiden Seiten des Querschnitts in T' entsprechen daher in W' zwei verschiedene Linien, der linken die Hauptaxe AB, der rechten eine durch $2\pi i$ mit der Hauptaxe parallel laufende Gerade CD (Fig. 33).

Fig. 33.



Lässt man nun z an irgend einer Stelle von der linken Seite c des Querschnitts auf einem Kreise um den Nullpunct auf die rechte Seite d gelangen, so bleibt r und daher auch $\log r$ constant, und φ wächst von 0 bis 2π. Folglich beschreibt w eine der y-Axe parallele Gerade $c'd'$ von der Hauptaxe AB bis zu der Parallelen CD. Daraus folgt, dass allen Puncten z in der ganzen unendlichen Ausdehnung der Fläche T', in welcher φ nicht über 2π hinaus wachsen kann, nur solche Puncte w entsprechen, die innerhalb des von den beiden Parallelen AB und CD gebildeten Streifens liegen. Die Function e^w oder z nimmt also innerhalb dieses Streifens ihre sämmtlichen Werthe an, und zwar jeden nur einmal, denn irgend zwei verschiedenen Werthen von $w = \log r + i\varphi$ gehören auch verschiedene Werthe von r oder φ und also auch verschiedene Werthe von

$$e^w = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \text{an.}$$

Will man die Fläche T' begrenzen, so kann dies einerseits dadurch geschehen, dass man um den Nullpunct einen Kreis mit

einem sehr kleinen Radius ϱ beschreibt; diesem entspricht, da ϱ constant bleibt, in W eine der y-Axe parallele Gerade ns zwischen den beiden Parallelen AB und CD, welche sehr weit vom Nullpuncte entfernt auf der negativen Seite liegt. Diese rückt ins Unendliche, wenn ϱ bis zum Verschwinden abnimmt, also der Kreis in den Nullpunct zusammenschrumpft. In allen Puncten dieser ins Unendliche gerückten Geraden ns hat daher e^w den Werth Null. Andrerseits kann die Begrenzung von T' durch einen Kreis um den Nullpunct mit einem sehr grossen Radius R gebildet werden. Diesem entspricht in W eine auf der positiven Seite sehr weit entfernte Gerade mr parallel der y-Axe. Wächst R ins Unendliche, so rückt auch diese Gerade ins Unendliche, und in allen ihren Puncten ist e^w unendlich gross. Die Fläche T' kann im Unendlichen geschlossen angenommen werden, dann wird der Kreis mit dem grossen Radius R durch einen kleinen Kreis um den Punct ∞ vertreten, welcher in diesen Punct zusammenschrumpft, wenn R ins Unendliche wächst. Dann bilden also die beiden Seiten des von 0 nach ∞ gehenden Querschnitts allein die Begrenzung der geschlossenen Fläche T', und dieser entspricht der nach beiden Seiten ins Unendliche gehende Streifen zwischen den Parallelen AB und CD.

Fig. 32.

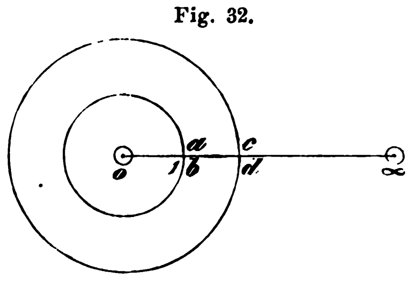
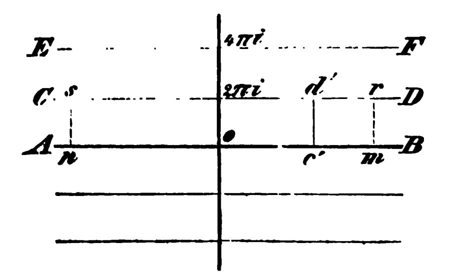


Fig. 33.



Lassen wir jetzt den Winkel φ über 2π hinaus wachsen, so setzt sich die Function w oder $\log z$ stetig fort; dann kann man sich den Querschnitt wie einen Verzweigungsschnitt denken, über den hinüber die Fläche T' sich in ein zweites Blatt fortsetzt. In diesem zweiten Blatte verhält sich dann alles wie im ersten; nur dass in allen Puncten desselben φ um 2π, also w um $2\pi i$ grösser ist, als an der entsprechenden Stelle im ersten Blatte. Daher

erhält man in W einen zweiten Streifen zwischen den Parallelen CD und EF, welche durch $2\pi i$ und $4\pi i$ hindurchgehen. Setzt man diese Betrachtung fort und wendet sie auch auf negative Werthe von φ an, so wird die Ebene W in unendlich viele parallele Streifen getheilt. In jedem nimmt die Function e^w ihre sämmtlichen Werthe einmal an und hat in je zwei entsprechenden Puncten zweier verschiedener Streifen die gleichen Werthe. Auf der positiven Seite jedes Streifens geht e^w in Unendliche, auf der negativen Seite aber nähert es sich der Null.

Sechster Abschnitt.

Allgemeine Eigenschaften der Functionen.

---

§ 24.

Die Grundlage für die folgenden Untersuchungen bildet der überaus wichtige, in § 20 bewiesene Satz: Wird das Integral $\int f(z)dz$ auf die Begrenzung eines Flächentheils ausgedehnt, in welchem $f(z)$ keine Verzweigungspuncte besitzt (oder einändrig ist), und nur in einem Puncte $z = a$ unstetig wird, und zwar so, dass $(z-a)f(z)$ sich für $z = a$ einem bestimmten endlichen Grenzwerthe p nähert, so ist

$$\int f(z)\,dz = 2\pi i p.$$

Ist nun $\varphi(z)$ eine Function, die in einem Flächentheile T keine Verzweigungspuncte besitzt und darin überall stetig bleibt, und bedeutet t einen beliebigen Punct dieser Fläche, so hat die Function

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z-t}$$

in T die im vorigen Satze verlangten Eigenschaften. Sie besitzt ebenfalls keine Verzweigungspuncte und wird nur für $z = t$ unstetig, und zwar so, dass

$$(z-t)f(z) = \varphi(z)$$

sich für $z = t$ einem bestimmten endlichen Grenzwerthe, nämlich $\varphi(t)$, nähert. Man hat daher

$$\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-t} = 2\pi i\,\varphi(t),$$

das Integral auf die Begrenzung von T ausgedehnt. Hieraus folgt

(9) $$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-t}.$$

Dadurch ist der Werth der Function φ für jeden Punct t im Innern von T durch ein Integral gegeben, bei welchem die Variable z nur die Puncte der Begrenzung von T durchläuft; und dieses Integral ist für jeden im Innern von T liegenden Punct t endlich und stetig. Denkt man sich nun die Function $\varphi(z)$ nicht durch einen Ausdruck, sondern durch ihre Werthe für alle Puncte eines gewissen Gebietes gegeben, so folgt aus der vorigen Gleichung, dass wenn die Function nur für alle Puncte der Begrenzung von T gegeben ist, sie für jeden Punct im Innern von T ebenfalls ermittelt werden kann und daher im Innern von T, wo sie nicht unstetig werden und sich nicht verzweigen soll, nicht mehr willkürlich angenommen werden darf.

Nun folgt ferner durch Differentiation nach t

(10) $$\left\{\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)}{(z-t)^2}\,dz \\ \varphi''(t) &= \frac{2}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)}{(z-t)^3}\,dz \\ \varphi'''(t) &= \frac{2.3}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)}{(z-t)^4}\,dz \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi^{(n)}(t) &= \frac{2.3\ldots n}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)}{(z-t)^{n+1}}\,dz. \end{aligned}\right.$$

Alle diese Integrale erstrecken sich auf die Begrenzung von T, daher verschwindet in ihnen niemals $z-t$, und folglich bleiben sie alle für jeden Werth von t endlich und stetig*). Also folgt

*) Giebt man in dem Integrale

$$\int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-t)^n} = F(t),$$

worin n eine beliebige positive ganze Zahl bedeute, der Variablen t einen unendlich kleinen Zuwachs h, so ist

der Satz: **Wenn eine Function in einem Gebiete endlich und stetig ist und darin auch keine Verzweigungspuncte besitzt, so sind auch alle ihre Derivirten in demselben Gebiete endliche und stetige Functionen.**

Bezieht man in der Gleichung (9) die Integration auf einen beliebig kleinen Kreis um den Punct t mit dem Radius r und setzt zu dem Ende

$$z - t = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so ist

$$\frac{dz}{z-t} = i\,d\varphi,$$

und daher

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(z)\,d\varphi.$$

Setzt man nun

$$\varphi(z) = u + iv \qquad \varphi(t) = u_0 + iv_0,$$

so erhält man durch Sonderung des Reellen vom Imaginären

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\,d\varphi \qquad v_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\,d\varphi.$$

Hieraus folgt, dass die reellen Bestandtheile der Function φ im Puncte t Mittelwerthe aus allen ringsherum liegenden benachbarten Werthen dieser Bestandtheile sind. Es muss also u_0 grösser als ein Theil, und zugleich kleiner als ein anderer Theil dieser Nachbarwerthe sein. Dasselbe gilt von v_0, und da das Nämliche in jedem Puncte des Gebietes T stattfindet, so haben die reellen Bestandtheile der Function φ in keinem Puncte von T einen Maximal- oder einen Minimalwerth.

$$F(t+h) - F(t) = \int\left[\frac{1}{(z-t-h)^n} - \frac{1}{(z-t)^n}\right]\varphi(z)\,dz$$
$$= \int\frac{(z-t)^n - (z-t-h)^n}{[(z-t)^2 - h\,(z-t)]^n}\,\varphi(z)\,dz,$$

und wenn man nach dem binomischen Satze entwickelt,

$$F(t+h) - F(t) = \int\frac{(n)_1 h\,(z-t)^{n-1} - (n)_2 h^2\,(z-t)^{n-2} + \cdots \pm h^n}{[(z-t)^2 - h\,(z-t)]^n}\,\varphi(z)\,dz.$$

Demnach wird die Differenz $F(t+h) - F(t)$, so lange $z - t$ nicht verschwindet, mit h zugleich unendlich klein, und folglich ist das Integral $F(t)$ in t stetig.

§ 25.

Mit Hülfe der Gleichung 9 kann die Function φ in eine convergirende Reihe entwickelt werden. Man beschreibe um einen beliebigen Punct a des Gebietes T einen Kreis, der noch ganz in dieses Gebiet hineinfällt, welcher also noch nicht ganz bis an den zunächst an a gelegenen Unstetigkeitspunct oder Verzweigungspunct hinanreicht, und nehme diesen Kreis als Integrationscurve in der Gleichung (9). Dabei kann der Punct a so gewählt werden, dass der Kreis einen möglichst grossen Theil des Gebietes T umfasst. Nun ist für jeden im Inneren des Kreises liegenden Punct t

$$\operatorname{mod}(z-a) > \operatorname{mod}(t-a)$$

(Fig. 34), da z bei der Integration nur Puncte der Peripherie des Kreises durchläuft. Man kann aber schreiben

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-a-(t-a)} = \frac{1}{z-a}\,\frac{1}{1-\dfrac{t-a}{z-a}}$$

und diesen Bruch, weil

$$\operatorname{mod}\frac{t-a}{z-a} < 1$$

ist, in die convergirende Reihe

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-a}\left\{1 + \frac{t-a}{z-a} + \frac{(t-a)^2}{(z-a)^2} + \frac{(t-a)^3}{(z-a)^3} + \cdots\cdots\right\}$$

entwickeln. Substituirt man diese Reihe in (9)*), so erhält man

$$(11)\quad \varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int\frac{\varphi(z)\,dz}{z-a} + (t-a)\int\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-a)^2} + (t-a)^2\int\frac{\varphi(z)dz}{(z-a)^3} + \cdots\right\}$$

und dies ist nichts anderes als die **Taylor'sche Reihe**; denn nach (9) ist

---

*) In Betreff der Zulässigkeit, die convergente Potenz-Reihe zu integriren, möge auf *Briot* und *Bouquet* „Théorie des fonctions doublement périodiques." Paris 1859. verwiesen werden. Dort ist in Art. 16 gezeigt worden, dass durch Differentiation einer convergenten Reihe wieder eine convergente Reihe entsteht, welche die Derivirte der durch die erstere dargestellten Function ist. Mit denselben Mitteln kann man auch zeigen, dass die Differentiation einer divergenten Reihe zu einer divergenten Reihe führt. Aus beidem zusammen ergiebt sich dann, dass auch die Integration einer convergenten Reihe zu einer convergenten Reihe führen muss, die das Integral der durch die erstere dargestellten Function bildet.

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-a} = \varphi(a) \tag{12}$$

und nach den Gleichungen (10)

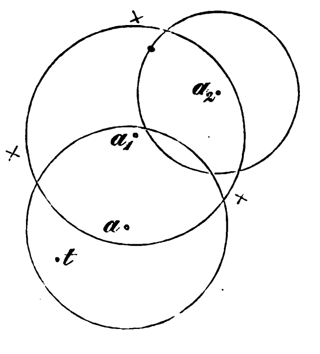
$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{\varphi^{(n)}(a)}{2.3\ldots n}, \tag{13}$$

also erhält man

$$\varphi(t) = \varphi(a) + (t-a)\varphi'(a) + (t-a)^2\frac{\varphi''(a)}{2} + (t-a)^3\frac{\varphi'''(a)}{2.3} + \cdots \tag{14}$$

Diese Ableitung der Taylor'schen Reihe hat den Vortheil, dass sie mit Bestimmtheit erkennen lässt, wie weit sich die Convergenz dieser Reihe erstreckt: nämlich auf alle Puncte t, welche von a weniger weit entfernt sind, als der nächste Unstetigkeitspunct oder Verzweigungspunct. In Fig. 34 sind drei solcher Puncte durch Kreuze angedeutet worden.

Fig. 34.



In der Reihe (11) sind zwar ursprünglich alle Integrationen längs des Kreises um a zu nehmen; aber da die Functionen

$$\frac{\varphi(z)}{z-a},\ \frac{\varphi(z)}{(z-a)^2},\ \frac{\varphi(z)}{(z-a)^3},\ \text{etc.}$$

bis an den Punct a heran endlich und stetig bleiben, so können die Integrale auch längs eines beliebig kleinen um a beschriebenen Kreises genommen werden, ohne ihre Werthe zu ändern. Wenn daher die Function φ durch ihre Werthe in einem beliebig kleinen endlichen, den Punct a enthaltenden, Flächenstücke gegeben ist, so sind dadurch alle jene Integrale, mithin alle Coefficienten der convergirenden Reihe bestimmt, und folglich kann der Werth der Function für jeden Punct im Innern des grossen Kreises ermittelt werden.

Ist nun a_1 ein Punct, der noch im Innern dieses Kreises liegt, so ist also jetzt $\varphi(t)$ sowohl in a_1 als auch in dem ihn zunächst umgebenden Flächentheile bekannt. Beschreibt man dann um a_1 einen Kreis, der noch alle Unstetigkeitspuncte und Verzweigungspuncte ausserhalb lässt (Fig. 34), so kann $\varphi(t)$ für alle Puncte dieser Kreisfläche in eine neue Reihe entwickelt werden. Fährt man so fort, so sieht man, wenn die Function $\varphi(t)$ nur innerhalb eines beliebig kleinen endlichen Theiles eines Ge-

bietes T gegeben ist (oder eigentlich nur längs einer beliebig kleinen geschlossenen Linie), dass sie dann schon in dem ganzen Gebiete T, in welchem weder ein Unstetigkeitspunct noch ein Verzweigungspunct liegt, bestimmt werden kann.

Dasselbe gilt, wenn die Function $\varphi(t)$ nur längs einer beliebig kleinen endlichen von a ausgehenden Linie gegeben ist. Ist dies nämlich der Fall, und bezeichnet man die stetig auf einander folgenden Puncte dieser Linie mit a, b, c, d, etc., so ist

$$\varphi'(a) = \lim \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a},$$

also bekannt, wenn $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ bekannt sind. Ebenso ist

$$\varphi'(b) = \lim \frac{\varphi(c) - \varphi(b)}{c - b},$$

wodurch $\varphi'(b)$ bekannt wird. In dieser Weise können die Werthe der Derivirten $\varphi'(t)$ für alle Puncte a, b, c, d, etc. gefunden werden. Alsdann ist

$$\varphi''(a) = \lim \frac{\varphi'(b) - \varphi'(a)}{b - a},$$

$$\varphi''(b) = \lim \frac{\varphi'(c) - \varphi'(b)}{c - b}$$

u. s. w., sodass auch die zweiten Derivirten bekannt sind. Fährt man in dieser Weise fort, so können die Werthe aller Derivirten für den Punct a, also auch alle Coefficienten der Reihe (14) bestimmt werden. Man erhält also für jeden Punct a_1 innerhalb des ersten Kreises $\varphi(a_1)$ durch eine convergente Reihe ausgedrückt. Durch Differentiation derselben ergeben sich dann auch die Werthe der Derivirten $\varphi'(a_1)$, $\varphi''(a_1)$ etc. Kennt man dann die Werthe der Function $\varphi(t)$ und ihrer Derivirten für den Punct a_1, so können dieselben Grössen für jeden Punct des zweiten Kreises durch convergente Reihen ausgedrückt werden, u. s. f.

Aus allem diesem folgt der Satz: Eine Function einer complexen Variablen, welche in einem beliebig kleinen endlichen Theile der z-Ebene (einer Fläche oder einer Linie) gegeben ist, kann darüber hinaus nur auf eine Weise stetig und ohne sich zu verzweigen fortgesetzt werden.

Als einen speciellen Fall dieses Satzes heben wir hervor: Wenn eine Function in einem endlichen beliebig kleinen Theile (Fläche oder Linie) des Gebietes T constant ist, so ist sie überall in T constant. Denn ist sie

in einer kleinen Fläche, die den Punct a enthält, constant $= C$, so nehme man in den Gleichungen (12) und (13) als Integrationscurve einen innerhalb dieses kleinen Flächentheils liegenden Kreis um a und setze

$$z - a = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

dann folgt aus (12)

$$\varphi\,(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2} \varphi\,(z)\,d\varphi = \frac{C}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi = C,$$

weil $\varphi\,(z)$ in allen Puncten der Peripherie des Kreises den Werth C besitzt. Ferner wird aus (13)

$$\frac{\varphi^{(n)}(a)}{2.3\ldots n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi\,(z)}{(z-a)^n}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\frac{C}{r^n}\int_0^{2\pi} (\cos n\varphi - i\sin n\varphi)\,d\varphi,$$

und dieser Werth verschwindet, weil für jeden ganzzahligen von Null verschiedenen Werth von n

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi\,d\varphi = 0 \quad \text{und} \int_0^{2\pi} \sin n\varphi\,d\varphi = 0$$

ist. In der Reihe (11) wird also $\varphi\,(a) = C$ und alle übrigen Glieder verschwinden, daher ist für jeden Punct des Convergenzkreises $\varphi\,(t) = C$. Setzt man nun die Function in der oben angedeuteten Weise in Flächenstreifen, die sich zwischen den Unstetigkeitspuncten und Verzweigungspuncten hinziehen, fort, so bleibt $\varphi\,(t)$ überall constant $= C$.

Dasselbe gilt, wenn $\varphi\,(t)$ längs einer beliebig kleinen endlichen Linie constant ist. In diesem Falle sind bei Anwendung der obigen Bezeichnung die Werthe $\varphi\,(a)$, $\varphi\,(b)$, $\varphi\,(c)$, etc. alle gleich C, und folglich verschwinden wieder alle Derivirten $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$, etc., und damit alle Coefficienten der Reihe (14) mit Ausnahme des ersten, welcher $= C$ ist. Es gilt also dasselbe wie oben.

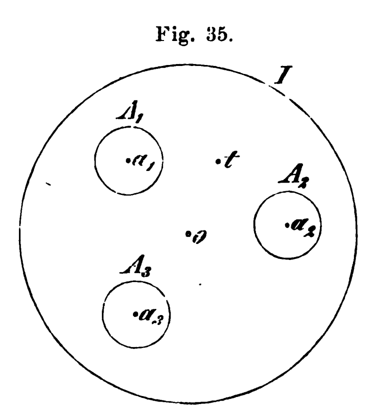
Aus diesem speciellen Satze kann wieder der vorhergehende allgemeinere abgeleitet werden. Wenn nämlich zwei Functionen $\varphi\,(t)$ und $\psi\,(t)$ in einem beliebig kleinen Flächen- oder Linientheile in ihren Werthen übereinstimmen, so ist in diesem Theile die Function $\varphi\,(t) - \psi\,(t)$ constant gleich Null; folglich ist diese Function überall gleich Null, d. h. es ist überall $\psi\,(t) = \varphi\,(t)$, und daher kann die Function $\varphi\,(t)$ von dem Theile aus, in dem

sie gegeben ist, nicht auf zwei verschiedene Weisen fortgesetzt werden.

§ 26.

Wir gehen nun zur Entwickelung einer Function innerhalb eines Gebietes über, in dem auch Unstetigkeitspuncte der Function liegen, schliessen aber Verzweigungspuncte davon aus. Wir wollen hier nur den Fall behandeln, dass die Function gar keine Verzweigungspuncte besitzt, und können in diesem Falle das Gebiet auf die ganze unendliche Ebene ausdehnen.

Fig. 35.



Seien a_1, a_2, a_3, etc. die Puncte innerhalb T, in denen $\varphi(t)$ unstetig ist. Wir legen erstlich um den Nullpunct einen Kreis (I) mit dem Radius R, welcher alle diese Puncte umgiebt (Fig. 35); ausserdem um jeden der Puncte a_1, a_2, a_3, etc. einen kleinen Kreis (A_1), (A_2), (A_3), etc. resp. mit den Radien r_1, r_2, r_3, etc. Alle diese Kreise (A) und (I) zusammengenommen bilden dann die Begrenzung eines Gebietes U, innerhalb dessen φ (t) stetig ist. Für jeden Punct t im Innern von U ist daher (§ 24)

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(z)}{z-t} dz,$$

das Integral auf die ganze Begrenzung von U ausgedehnt. Dasselbe zerlegt sich in so viele Theile, als Begrenzungsstücke vorhanden sind. Wir bezeichnen die auf die letzteren, also auf die Kreise (I), (A_1), (A_2), (A_3) etc. sämmtlich in der positiven Begrenzungsrichtung (§ 17) erstreckten Integrale durch I, A_1, A_2, A_3, etc. und haben dann

$$\varphi(t) = I + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots\cdots.$$

Dann wird der Kreis (I) in der Richtung der wachsenden Winkel, jeder der Kreise (A_k) aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, folglich ist, wenn man jetzt alle Integrationen in der Richtung der wachsenden Winkel ausführt,

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-t} \qquad A_k = -\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-t}.$$

Setzt man dann in I

$$z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi), \text{ also } \frac{dz}{z} = i\,d\varphi$$

und in A_k

$$z - a_k = r_k(\cos\varphi + i\sin\varphi), \text{ also } \frac{dz}{z-a_k} = i\,d\varphi,$$

so kann man auch schreiben

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\varphi(z)}{z-t}\,d\varphi, \quad A_k = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(z-a_k)\,\varphi(z)}{z-t}\,d\varphi.$$

Nun liegt t immer innerhalb der von (I) begrenzten Kreisfläche; daher ist bei I für jeden Punct t

$$\text{mod } z > \text{mod } t,$$

folglich kann $\frac{z}{z-t}$ nach steigenden Potenzen von $\frac{t}{z}$ in eine convergirende Reihe entwickelt werden. Man erhält nämlich

$$\frac{z}{z-t} = \frac{1}{1-\frac{t}{z}} = 1 + \frac{t}{z} + \frac{t^2}{z^2} + \frac{t^3}{z^3} + \cdots\cdots,$$

also

$$I = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\varphi(z)\,d\varphi + t\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(z)}{z}\,d\varphi + t^2\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(z)}{z^2}\,d\varphi + \cdots\right\}$$

oder

$$I = Q + Q' t + Q'' t^2 + Q''' t^3 + \cdots,$$

wenn man der Kürze wegen

$$Q^{(m)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(z)}{z^m}\,d\varphi$$

setzt, das Integral auf den Kreis (I) mit dem Radius R in der Richtung der wachsenden Winkel erstreckt.

Jeder Punct t des Gebietes U liegt ferner ausserhalb aller von den Kreisen (A_k) begrenzten Kreisflächen. Daher ist in jedem Integrale A_k

$$\text{mod }(t - a_k) > \text{mod }(z - a_k),$$

folglich kann $\frac{z-a_k}{z-t}$ nach steigenden Potenzen von $\frac{z-a_k}{t-a_k}$ d. h. nach fallenden Potenzen von $t - a_k$ in eine convergirende Reihe entwickelt werden. Dann erhält man

$$\frac{z-a_k}{z-t} = \frac{z-a_k}{z-a_k-(t-a_k)} = -\frac{z-a_k}{t-a_k}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a_k}{t-a_k}},$$

also

$$-\frac{z-a_k}{z-t} = \frac{z-a_k}{t-a_k} + \frac{(z-a_k)^2}{(t-a_k)^2} + \frac{(z-a_k)^3}{(t-a_k)^3} + \cdots\cdots$$

und durch Substitution in A_k

$$A_k = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{t-a_k}\int_0^{2\pi}(z-a_k)\,\varphi(z)\,d\varphi + \frac{1}{(t-a_k)^2}\int_0^{2\pi}(z-a_k)^2\varphi(z)\,d\varphi\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(t-a_k)^3}\int_0^{2\pi}(z-a_k)^3\,\varphi(z)\,d\varphi + \cdots\right\}$$

oder

$$A_k = \frac{c_k'}{t-a_k} + \frac{c_k''}{(t-a_k)^2} + \frac{c_k'''}{(t-a_k)^3} + \cdots\cdots,$$

wenn man der Kürze wegen

$$c_k^{(p)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(z-a_k)^p\,\varphi(z)\,d\varphi$$

setzt. Durch Substitution dieser Reihen erhält man nun vollständig

$$15)\left\{\begin{aligned}
\varphi(t) = Q + Q'\,t + Q''\,t^2 + Q'''\,t^3 + \cdots + Q^{(m)}\,t^m \quad &+ \cdots = I\\
+ \frac{c_1'}{t-a_1} + \frac{c_1''}{(t-a_1)^2} + \frac{c_1'''}{(t-a_1)^3} + \cdots + \frac{c_1^{(p)}}{(t-a_1)^p} &+ \cdots + A_1\\
+ \frac{c_2'}{t-a_2} + \frac{c_2''}{(t-a_2)^2} + \frac{c_2'''}{(t-a_2)^3} + \cdots + \frac{c_2^{(p)}}{(t-a_2)^p} &+ \cdots + A_2\\
+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &+ \cdots\\
+ \frac{c_k'}{t-a_k} + \frac{c_k''}{(t-a_k)^2} + \frac{c_k'''}{(t-a_k)^3} + \cdots + \frac{c_k^{(p)}}{(t-a_k)^p} &+ \cdots + A_k\\
+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, &+ \cdots
\end{aligned}\right.$$

wobei

$$16)\left\{\begin{aligned}
Q^{(m)} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(z)}{z^m}\,d\varphi, \quad \text{auf } (I) \text{ erstreckt}\\
c_k^{(p)} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(z-a_k)^p\,\varphi(z)\,d\varphi, \quad \text{auf } (A_k) \text{ erstreckt.}
\end{aligned}\right.$$

Siebenter Abschnitt.

eber das unendlich gross und unendlich klein Werden der Functionen.

Obgleich die Sätze, welche in diesem Abschnitte bewiesen erden sollen, auch aus den im vorigen § entwickelten Reihen ergeleitet werden können, so haben wir doch aus mehreren ründen vorgezogen, sie ohne Hülfe der unendlichen Reihen abıleiten, und werden die letzteren nur da mit heranzuziehen ha- en, wo es sich wirklich um unendliche Reihen handelt. Wir üssen hier aber die Functionen, welche keine Verzweigungsıncte besitzen, von den übrigen trennen und zuerst abgesonert betrachten, sowohl weil sie die Grundlage für die Unterıchung der übrigen bilden, als auch weil sie vor den übrigen nige ausgezeichnete Eigenschaften voraus haben. Wir werden e Functionen ohne Verzweigungspuncte, welches die eindeutigen unctionen im gewöhnlichen Sinne des Wortes sind, nach *Rieann* einwerthige Functionen nennen. Zum Voraus muss daei bemerkt werden, dass alle von den einwerthigen Functionen ı beweisenden Sätze, die sich nur auf endliche Flächentheile eziehen, zugleich auch von Functionen mit Verzweigungspuncıncten gelten, sobald nur in dem zu berücksichtigenden Fläıentheile keine Verzweigungspuncte der Function liegen.

A. Functionen ohne Verzweigungspuncte. Einwerthige Functionen.

§ 27.

Wenn eine einwerthige Function $\varphi(z)$ für irgend einen 'erth $z=a$ endlich bleibt, so nähert sich das Product $(z-a)\,\varphi(z)$ ır $z=a$ der Null. Wir zeigen nun zuerst, dass auch das Umekehrte stattfindet. Es werde angenommen, eine nicht durch nen Ausdruck gegebene einwerthige Function $\varphi(z)$ sei in einem lächentheile T endlich und stetig, nur in einem Punete $z=a$

dieses Gebietes sei es ungewiss, ob $\varphi'z$, endlich und stetig sei oder nicht, dagegen sei

$$\Big[\lim (z-a)\,\varphi(z)\Big]_{z=a} = 0.$$

Schliesst man den Punct a durch einen kleinen Kreis k aus, so ist $\varphi(z)$ in dem entstehenden Gebiete U gewiss endlich und stetig, und daher für jeden Punct t innerhalb U

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)}{z-t}\,dz,$$

das Integral auf die Begrenzung von U ausgedehnt. Dies zerlegt sich in zwei Theile. Setzt man in dem zweiten, auf die Peripherie des kleinen Kreises k ausgedehnten Integrale

$$z-a=r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\ ,\ dz=(z-a)\,i\,d\varphi,$$

so erhält man

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-t} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(z-a)\,\varphi(z)}{z-t}\,d\varphi,$$

worin das erste Integral sich auf die Begrenzung von T allein bezieht. Lässt man nun aber den kleinen Kreis ins Unendliche abnehmen, so nähert sich der Voraussetzung nach $(z-a)\,\varphi(z)$ der Null; folglich verschwindet mit dem Radius des kleinen Kreises zugleich auch das zweite Integral, und man erhält

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-t},$$

worin die Integration auf die Begrenzung von T allein auszudehnen ist. Dies Integral ist aber für jeden Punct im Inneren von T endlich und stetig (§ 24. Note), also auch für $t=a$, und daher ist auch $\varphi(z)$ für $z=a$ endlich und stetig. Demnach haben wir den Satz: Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine einwerthige Function in einem Puncte $z=a$ endlich und stetig bleibt, ist

$$\Big[\lim (z-a)\,\varphi(z)\Big]_{z=a} = 0.$$

Hieraus folgt ferner, dass eine einwerthige Function nur dadurch unstetig werden kann, dass sie unendlich gross wird, denn so lange $\varphi(z)$ für $z=a$ nicht unendlich gross ist, ist $\lim\,(z-a)\,\varphi(z)=0$, also $\varphi(z)$ stetig.

§ 28.

Wenn eine einwerthige Function für keinen endlichen oder unendlich grossen Werth der Variablen unendlich gross wird, so ist sie eine Constante. Man kann in diesem Falle in der Gleichung

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\, dz}{z-t}$$

als Integrations-Curve einen Kreis um den Nullpunct nehmen und denselben ins Unendliche wachsen lassen, weil $\varphi(t)$ der Annahme nach in allen Puncten der Ebene endlich und daher nach dem vorigen Satze auch stetig bleibt. Setzt man

$$z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad , \quad dz = z\, i\, d\varphi,$$

so folgt

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\,\varphi(z)}{z-t}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)}{1-\frac{t}{z}}\, d\varphi.$$

Wächst nun der Radius des Kreises ins Unendliche, so werden in dem Integrale alle Werthe von z unendlich gross, und folglich verschwindet $\frac{t}{z}$. Daher wird $\varphi(t)$ unabhängig von t, das heisst constant.

Hieraus folgt unmittelbar: **Wenn eine einwerthige Function nicht eine Constante ist, so muss sie nothwendig für irgend einen endlichen oder unendlichen Werth der Variablen unendlich gross werden.**

Weiter folgt: **Eine einwerthige Function muss für irgend einen Werth der Variablen den Werth Null annehmen.** Denn wird $\varphi(z)$ nirgend gleich Null, so wird $\frac{1}{\varphi(z)}$ nirgend unendlich gross, also wäre $\frac{1}{\varphi(z)}$ eine Constante, und daher auch $\varphi(z)$.

Endlich: **Eine einwerthige Function muss mindestens einmal jeden beliebigen Werth k annehmen können.** Denn wäre $\varphi(z)$ nirgend $= k$, so wäre $\varphi(z) - k$ nirgend gleich Null, also eine Constante, und folglich auch $\varphi(z)$ eine Constante.

Es verdient hervorgehoben zu werden, wie diese Sätze eine Harmonie in der Functionenlehre herstellen, die bei Ausschliessung complexer Werthe der Variablen nicht stattfindet. Berücksich-

tigt man bloss reelle Werthe der Variablen, so wird z. B. die einwerthige Function cos z nicht unendlich gross und nimmt nicht jeden beliebigen Werth an, sondern nur die Werthe zwischen -1 und $+1$. Es findet hier eine gewisse Analogie mit den algebraischen Gleichungen statt. Bei diesen bleiben auch die Fundamentalsätze, dass jede algebraische Gleichung eine Wurzel haben muss, und dass jede Gleichung $n$ten Grades n Wurzeln hat, nicht allgemein richtig, wenn man nur reelle Wurzeln berücksichtigt. Daher hat man in dieser Disciplin seit langer Zeit die complexen Wurzeln stets mit berücksichtigt. Es zeigt sich nun der grosse Werth, den die Einführung der complexen Variabeln für die Functionenlehre hat, da auch hier gewisse allgemeine Sätze gelten, die bei Ausschliessung complexer Werthe der Variablen nicht mehr allgemein richtig bleiben.

§ 29.

Wenn das Product $(z-a)\,\varphi(z)$ bei unendlicher Annäherung des z an den Punct a nicht mehr gegen die Null convergirt, so wird $\varphi(z)$ für $z=a$ unendlich gross. Wir wollen nun aber annehmen, dass es eine Potenz von $z-a$ mit einem ganzen oder gebrochenen Exponenten μ gäbe, für welchen

$$(z-a)^{\mu}\varphi(z) \text{ nicht unendlich gross}$$

werde an der Stelle $z=a$. Bezeichnet dann n die grösste in μ enthaltene ganze Zahl, sodass

$$n \leqq \mu < n+1$$

sei, so ist

$$\lim\,(z-a)^{n+1}\varphi(z) = \lim\,(z-a)^{n+1-\mu}(z-a)^{\mu}\varphi(z) = 0,$$

weil $n+1-\mu$ positiv ist. Alsdann ist nach § 27

$$(z-a)^{n}\varphi(z)$$

eine Function, welche für $z=a$ endlich bleibt. Bezeichnet $c^{(n)}$ den endlichen Grenzwerth derselben für $z=a$, so ist nun

$$(z-a)^{n}\varphi(z) - c^{(n)}$$

eine Function, welche für $z=a$ verschwindet, und folglich bleibt wieder nach § 27

$$(z-a)^{n-1}\varphi(z)-\frac{c^{(n)}}{z-a}$$

für $z=a$ endlich. Bezeichnet dann $c^{(n-1)}$ den endlichen Grenzwerth derselben, so verschwindet

$$(z-a)^{n-1}\varphi(z)-\frac{c^{(n)}}{z-a}-c^{(n-1)}$$

für $z=a$, und folglich bleibt

$$(z-a)^{n-2}\varphi(z)-\frac{c^{(n)}}{(z-a)^2}-\frac{c^{(n-1)}}{z-a}$$

an der Stelle $z=a$ endlich. Fährt man in dieser Weise fort, so gelangt man endlich zu einer Function

$$\varphi(z)-\frac{c^{(n)}}{(z-a)^n}-\frac{c^{(n-1)}}{(z-a)^{n-1}}-\frac{c^{(n-2)}}{(z-a)^{n-2}}-\cdots\cdots-\frac{c''}{(z-a)^2}-\frac{c'}{z-a},$$

welche für $z=a$ endlich und daher auch stetig ist. Setzt man also

$$\varphi(z)-\frac{c'}{z-a}-\frac{c''}{(z-a)^2}-\frac{c'''}{(z-a)^3}-\cdots\cdots-\frac{c^{(n)}}{(z-a)^n}=\psi(z),$$

so bedeutet $\psi(z)$ eine für $z=a$ endliche und stetige Function, und man erhält, wenn noch der Kürze wegen

$$\frac{c'}{z-a}+\frac{c''}{(z-a)^2}+\frac{c'''}{(z-a)^3}+\cdots+\frac{c^{(n)}}{(z-a)^n}=A \tag{17}$$

gesetzt wird,

$$\varphi(z)=A+\psi(z), \tag{18}$$

wobei

$$\begin{aligned} c^{(n)} &= \lim\,(z-a)^n\varphi(z)\\ c^{(n-1)} &= \lim\left[(z-a)^{n-1}\varphi(z)-\frac{c^{(n)}}{z-a}\right]\\ c^{(n-2)} &= \lim\left[(z-a)^{n-2}\varphi(z)-\frac{c^{(n)}}{(z-a)^2}-\frac{c^{(n-1)}}{z-a}\right] \end{aligned}$$

u. s. w.

ist. Wenn nun die endliche Constante $c^{(n)}$ nicht den Werth Null hat, wenn also in dem Ausdrucke A das Glied $\frac{c^{(n)}}{(z-a)^n}$ nicht fehlt, d. h. wenn

$\lim\,(z-a)^n\varphi(z)$ weder Null noch unendlich

ist, so sagt man: die Function $\varphi(z)$ wird für $z=a$ unendlich gross von der $n$ten Ordnung. Dann ist aber für jeden gebrochenen Exponenten μ diese Bedingung nicht erfüllt, son-

dern $\lim (z-a)^{\mu}\varphi(z)$ wird entweder Null oder unendlich; denn ist, wie wir ursprünglich annahmen, $\mu > n$, so ist

$$\lim (z-a)^{\mu}\varphi(z) = \lim (z-a)^{\mu-n}(z-a)^{n}\varphi(z) = 0,$$

ist aber $\mu < n$, so ist

$$\lim (z-a)^{\mu}\varphi(z) = \lim \frac{(z-a)^{n}\varphi(z)}{(z-a)^{n-\mu}} = \infty.$$

Folglich kann $\varphi(z)$ nicht von einer gebrochenen Ordnung unendlich werden, und wir erhalten den Satz: **Wenn eine einwerthige Function überhaupt von einer endlichen Ordnung unendlich wird, so kann sie nur von einer ganzen Ordnung unendlich werden.**

Der Ausdruck (17) für A bildet einen Theil der im § 26 (15) entwickelten Reihe A_k. Lässt man dort den Index k fort und berücksichtigt den hier vorliegenden Fall, dass $(z-a)^{n}\varphi(z)$ sich einem endlichen und von Null verschiedenen Grenzwerth nähert, also $\lim (z-a)^{n+1}\varphi(z) = 0$ ist, so wird nach (16)

$$c^{(n+1)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(z-a)^{n+1}\varphi(z)\, d\varphi = 0,$$

wenn man den Kreis um a, auf den sich die Integration bezieht, ins Unendliche abnehmen lässt. Daher verschwinden um so mehr $c^{(n+2)}$, $c^{(n+3)}$, etc., und folglich bricht die Reihe A_k bei dem Gliede $\frac{c^{(n)}}{(t-a)^{n}}$ ab, und wird mit unserem Ausdrucke (17) identisch.

Auf diese Uebereinstimmung wird deswegen hingewiesen, weil daraus hervorgeht, dass wenn die Function $\varphi(z)$ nicht mehr von einer endlichen Ordnung unendlich wird, wenn es also keinen endlichen Exponenten n giebt, für den $(z-a)^{n}\varphi(z)$ sich einem endlichen Grenzwerth nähert, dann an die Stelle des Ausdrucks A die unendliche Reihe A_k tritt, weil dann keiner ihrer Coefficienten mehr verschwindet.

Kehren wir nun noch einmal zu der Gleichung (18)

$$\varphi(z) = A + \psi(z)$$

zurück, so zeigt diese, dass eine Function $\varphi(z)$, welche an einer Stelle $z=a$ unendlich gross wird, sich an dieser Stelle von einer

dort endlich bleibenden Function $\psi(z)$ stets nur um einen Ausdruck von der Form A unterscheidet. Sie wird daher nur so unendlich wie dieser Ausdruck A. Ist z. B. $\varphi(z)$ für $z=a$ von der ersten Ordnung unendlich, so dass lim $(z-a)\,\varphi(z)$ endlich und von Null verschieden ist, so kann man auch sagen, $\varphi(z)$ wird dort unendlich wie $\frac{c'}{z-a}$. Oder ist $\varphi(z)$ für $z=a$ unendlich von der zweiten Ordnung, so ist es entweder unendlich wie $\frac{c'}{z-a}+\frac{c''}{(z-a)^2}$ oder nur wie $\frac{c''}{(z-a)^2}$ allein. Hat man eine andre Function $f(z)$, welche für $z=a$ ebenfalls von der $n$ten Ordnung unendlich wird, so kann diese auch nur so unendlich werden, wie ein ähnlicher Ausdruck A, der sich von dem vorigen nur in den Werthen der Coefficienten c unterscheiden kann. Ist die letztere Function $f(z)$ gegeben, so sind damit auch die Coefficienten c gegeben, und folglich ist $\varphi(z)$ an einer Unstetigkeitsstelle a bekannt, wenn eine Function $f(z)$ gegeben ist, die an dieser Stelle ebenso unstetig wird, wie $\varphi(z)$ es werden soll. Man kann alsdann setzen

$$\varphi(z)=f(z)+\psi(z),$$

worin $\psi(z)$ für $z=a$ endlich und stetig bleibt.

Aus der Gleichung $\varphi(z)=A+\psi(z)$ folgt durch Differentiation

$$\varphi'(z)=\frac{dA}{dz}+\psi'(z),$$

wo

$$\frac{dA}{dz}=-\frac{c'}{(z-a)^2}-\frac{2c''}{(z-a)^3}-\frac{3c'''}{(z-a)^4}-\cdots-\frac{n.\,c^{(n)}}{(z-a)^{n+1}}.$$

Da nun (nach § 24) $\psi'(z)$ für $z=a$ endlich bleibt, weil $\psi(z)$ hier endlich ist, so folgt, dass die Derivirte $\varphi'(z)$ einer einwerthigen Function $\varphi(z)$ an einer Stelle $z=a$, wo $\varphi(z)$ unendlich ist, ebenfalls unendlich wird, und zwar von einer um 1 höheren Ordnung wie $\varphi(z)$. In allen endlichen Puncten, in denen $\varphi(z)$ endlich ist, bleibt dagegen (nach § 24) auch $\varphi'(z)$ endlich, und daher sind die endlichen Unstetigkeitspuncte einer einwerthigen Function $\varphi(z)$ mit denen ihrer Derivirten $\varphi'(z)$ identisch.

Es wird sich später*) rechtfertigen lassen, dass man ein

*) Siehe unten § 34.

Unendlichwerden von der $n$ten Ordnung auch als ein Zusammenfallen von n Puncten ansehn kann, in denen die Function $\varphi(z)$ unendlich von der ersten Ordnung ist. Indem wir von dieser Auffassung schon jetzt Gebrauch machen, werden wir, wenn eine Function an einer Stelle unendlich gross von der $n$ten Ordnung wird, uns auch des Ausdrucks bedienen, dass sie dort n Mal unendlich werde.

§ 30.

Wir gehen nun zu der Untersuchung über, wie sich eine Function $\varphi(z)$ für einen unendlich grossen Werth der Variablen z verhält. Diese Betrachtung können wir auf die vorige zurückführen, indem wir $z = \frac{1}{u}$ setzen, wodurch $\varphi(z)$ in $f(u)$ übergehn möge, und dann $f(u)$ an der Stelle $u=0$ untersuchen. Nun ist zuerst (nach § 27) $f(u)$ für $u=0$ endlich und stetig, wenn $[\lim u f(u)]_{u=0} = 0$ ist. Also ist

$\varphi(z)$ für $z=\infty$ endlich und stetig, wenn $\left[\lim \frac{\varphi(z)}{z}\right]_{z=\infty} = 0$

ist. Ferner wird (nach § 29) $f(u)$ für $u=0$ von der $n$ten Ordnung oder n Mal unendlich, wenn $[\lim u^n f(u)]_{u=0}$ weder Null noch unendlich ist. Daher wird

$\varphi(z)$ für $z=\infty$ unendlich von der $n$ten Ordnung, wenn

$$\left[\lim \frac{\varphi(z)}{z^n}\right]_{z=\infty}$$

weder Null noch unendlich

ist. Man kann ferner nach § 29 in diesem Falle setzen:

$$f(u) = \frac{Q'}{u} + \frac{Q''}{u^2} + \frac{Q'''}{u^3} + \cdots + \frac{Q^{(n)}}{u^n} + \lambda(u),$$

wo $\lambda(u)$ eine für $u=0$ endlich bleibende Function, und die Grössen Q constante Coefficienten bedeuten. Geht $\lambda(u)$, durch z ausgedrückt, in $\psi(z)$ über, so erhält man hieraus

(19) $$\varphi(z) = Q' z + Q'' z^2 + Q''' z^3 + \cdots Q^{(n)} z^n + \psi(z),$$

worin $\psi(z)$ für $z=\infty$ endlich und stetig bleibt. In diesem Falle ist also $\varphi(z)$ unendlich wie eine ganze Function von z.

Aus der Gleichung (19) folgt

$$\varphi'(z) = Q' + 2Q''z + 3Q'''z^2 + \cdots + n\overset{(n)}{Q}z^{n-1} + \psi'(z). \quad (20)$$

Um nun zuerst zu untersuchen, wie sich die Derivirte $\psi'(z)$ der endlich bleibenden Function $\psi(z)$ im Unendlichen verhält, kehren wir wieder zu der Variablen u zurück. Da

$$\frac{du}{dz} = -\frac{1}{z^2} = -u^2$$

ist und

$$\psi(z) = \lambda(u)$$

war, so ist

$$\psi'(z) = -u^2\lambda'(u).$$

Nun ist $\lambda(u)$ endlich für $u=0$, also nach § 24 auch $\lambda'(u)$, und folglich wird

$$\psi'(z) = 0 \text{ für } z=\infty.$$

Wenn also eine Function im Puncte $z=\infty$ endlich und einändrig ist, so ist ihre Derivirte in diesem Puncte gleich Null.

Alsdann folgt aus (20), dass $\varphi'(z)$ für $z=\infty$ von einer um Eins niedrigeren Ordnung unendlich gross wird, als $\varphi(z)$. Ist also $\varphi(z)$ nur von der ersten Ordnung unendlich gross, so bleibt $\varphi'(z)$ endlich für $z=\infty$.

Die ganze Function in (19) bildet einen Theil der § 26 (15) abgeleiteten Reihe *I*. Diese wird nämlich zu einer endlichen, wenn

$$\lim \frac{\varphi(z)}{z^n} \text{ endlich, also } \lim \frac{\varphi(z)}{z^{n+1}} = 0$$

ist. Denn lässt man in dem Integral [§ 26 (16)]

$$\overset{(n+1)}{Q} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)}{z^{n+1}}\, d\varphi$$

den Integrationskreis (*I*) ins Unendliche wachsen, so convergirt es gegen Null; es verschwinden daher um so mehr $\overset{(n+2)}{Q}$, $\overset{(n+3)}{Q}$, etc., und die Reihe *I* bricht bei dem Gliede $\overset{(n)}{Q}z^n$ ab. Wenn es dagegen keinen endlichen Exponenten n giebt, für den $\lim \frac{\varphi(z)}{z^n}$ endlich ist, so wird $\varphi(z)$ unendlich, wie eine nach ganzen Potenzen von z fortschreitende unendliche Reihe.

§ 31.

Aus dem Vorigen ergeben sich nun folgende Sätze: **Wenn eine einwerthige Function für keinen endlichen Werth von z, sondern nur für $z=\infty$, und auch hier nur von endlicher Ordnung (n Mal) unendlich wird, so ist sie eine ganze Function $n$ten Grades.** Denn man hat in diesem Falle

$$\varphi(z) = Q' z + Q'' z^2 + Q''' z^3 + \cdots + Q^{(n)} z^n + \psi(z);$$

da nun aber $\psi(z)$ eine einwerthige Function ist, welche weder für einen endlichen noch für einen unendlichen Werth von z unendlich gross wird, so ist sie nach § 28 eine Constante. Bezeichnet man dieselbe mit Q, so folgt

$$\varphi(z) = Q + Q' z + Q'' z^2 + Q''' z^3 + \cdots + Q^{(n)} z^n,$$

also ist in der That $\varphi(z)$ eine ganze Function $n$ten Grades. Umgekehrt wird auch eine ganze Function $n$ten Grades $\varphi(z)$ nur für $z=\infty$ und hier n Mal unendlich; denn es ist

$$\left[\lim \frac{\varphi(z)}{z^n}\right]_{z=\infty} = Q^{(n)},$$

also endlich und zugleich von Null verschieden, wenn $\varphi(z)$ nicht von niedrigerem Grade ist, als vom $n$ten.

Wird eine einwerthige Function $\varphi(z)$ nur für $z=\infty$ unendlich gross, aber von unendlich hoher Ordnung, so lässt sie sich nach Potenzen von z in eine für jeden Werth von z convergirende Reihe entwickeln. Denn die Reihe *I* convergirt für jeden Punct innerhalb des Kreises (*I*) (vgl. § 26), wenn in demselben keine Unstetigkeitspuncte liegen, und dieser Kreis kann beliebig erweitert werden, wenn $\varphi(z)$ für keinen endlichen Werth von z unendlich wird. Daher unterscheidet sich $\varphi(z)$ von einer für alle Werthe von z convergirenden Reihe nur um eine einwerthige Function $\psi(z)$, welche für $z=\infty$ nicht, und daher überhaupt nicht unendlich wird, und die folglich eine Constante ist.

In diesem Falle ist die Reihe *I* nichts anderes als die *Mac Laurin*'sche Reihe. Denn nach § 26 (16) ist

$$Q^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)}{z^n}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n+1}}$$

und daher nach § 24 (10

$$Q^{(n)} = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{2 \cdot 3 \cdots n}.$$

Als Beispiel bietet sich hier die Exponentialfunction e^z dar. Diese wird, wie wir § 23 sahen, nur für $z = \infty$ unendlich gross. Es kann aber auch gezeigt werden, dass sie hier von unendlich hoher Ordnung unendlich wird, denn aus § 23 (8) folgt für $\varphi(z) = e^z$

$$Q^{(n)} = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{2 \cdot 3 \cdots n} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdots n}.$$

Diese Grösse verschwindet für kein endliches n. Daher muss

$$\left[\lim \frac{e^z}{z^n}\right]_{z=\infty}$$

für jedes endliche n unendlich gross sein, denn hätte diese Grösse für irgend ein n einen endlichen Grenzwerth, so wäre

$$\left[\lim \frac{e^z}{z^{n+1}}\right]_{z=\infty} = 0,$$

und daher müsste auch

$$Q^{(n+1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^z}{z^{n+1}}\, d\varphi$$

beim unendlichen Wachsen des Integrationskreises verschwinden, was, wie wir so eben gesehen haben, nicht der Fall ist. Die Exponentialfunction wird daher nur für $z = \infty$, hier aber von unendlich hoher Ordnung unendlich, und folglich convergirt die Exponentialreihe für jeden Werth der Variablen.

§ 32.

Wenn eine einwerthige Function nur für eine endliche Anzahl von Werthen der Variabeln und für jeden nur von endlicher Ordnung unendlich gross wird, (kurz, wenn sie nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich wird), so ist sie eine rationale Function.

Seien $a, b, c, \cdots k, l, \infty$ die Werthe von z, für welche $\varphi(z)$ unendlich wird, $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \varkappa, \lambda, \mu$ die resp. Ordnungszahlen des Unendlichwerdens; so kann man zuerst setzen

$$\varphi(z) = Q'z + Q''z^2 + \cdots + Q^{(\mu)}z^\mu + \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z = \infty$ nicht, also nur noch für $z = a, b, \cdots l$ unendlich wird; demnach hat man

$$\psi'(z) = \frac{c_1'}{z-a} + \frac{c_1''}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_1^{(\alpha)}}{(z-a)^\alpha} + \psi_1(z),$$

wo nun $\psi_1(z)$ nur noch für $b, c, \cdots l$ unendlich ist. Man hat also weiter

$$\psi_1(z) = \frac{c_2'}{z-b} + \frac{c_2''}{(z-b)^2} + \cdots + \frac{c_2^{(\beta)}}{(z-b)^\beta} + \psi_2(z).$$

Fährt man auf diese Weise fort, so gelangt man zu

$$\psi_{n-1}(z) = \frac{c_n'}{z-l} + \frac{c_n''}{(z-l)^2} + \cdots + \frac{c_n^{(\lambda)}}{(z-l)^\lambda} + \psi_n(z),$$

wo $\psi_n(z)$ gar nicht mehr unendlich wird, also eine Constante ist. Bezeichnet man diese mit Q, so erhält man, indem man die obigen Ausdrücke zusammensetzt,

$$\begin{aligned}\varphi(z) = {} & Q + Q'z + Q''z^2 + \cdots + Q^{(\mu)}z^\mu \\ & + \frac{c_1'}{z-a} + \frac{c_1''}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_1^{(\alpha)}}{(z-a)^\alpha} \\ & + \frac{c_2'}{z-b} + \frac{c_2''}{(z-b)^2} + \cdots + \frac{c_2^{(\beta)}}{(z-b)^\beta} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{c_n'}{z-l} + \frac{c_n''}{(z-l)^2} + \cdots + \frac{c_n^{(\lambda)}}{(z-l)^\lambda},\end{aligned}$$

also in der That eine rationale Function.

§ 33.

Eine einwerthige Function $\varphi(z)$ ist bis auf eine additive Constante bestimmt, sobald für jeden Unstetigkeitspunct eine Function gegeben ist, welche übrigens endlich bleibt, aber an der betreffenden Unstetigkeitsstelle ebenso unendlich wird, wie $\varphi(z)$ es werden soll. Seien a_1, a_2, a_3, etc. die Unstetigkeitspuncte von $\varphi(z)$, und denken wir uns darunter den Werth ∞ gleich mit begriffen. Ferner seien $f_1(z), f_2(z), f_3(z)$, etc. gegebene Functionen, welche überall endlich sind, nur resp. in den Puncten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ unendlich gross werden. Wenn dann $\varphi(z)$ in a_1 so unendlich werden soll wie $f_1(z)$, so kann man setzen

$$\varphi(z) = f_1(z) + \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z = a_1$ nicht unendlich wird. Da nun $f_1(z)$ für $z = a_2$ endlich ist, so muss $\psi(z)$ hier unendlich werden, und zwar so wie $\varphi(z)$. Soll daher $\varphi(z)$ in a_2 so unendlich werden, wie $f_2(z)$, so kann man setzen

$$\psi(z) = f_2(z) + \psi_1(z),$$

wo nun $\psi_1(z)$ nicht für a_1 und a_2, sondern nur noch für a_3, etc. unendlich wird. Fährt man so fort, so gelangt man endlich zu einer Function ψ, die gar nicht mehr unendlich wird, also eine Constante ist. Wird diese mit C bezeichnet, so erhält man

$$\varphi(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \ldots. + C.$$

§ 34.

Man sagt, eine Function $\varphi(z)$ wird für einen Werth von z unendlich klein oder Null von der $n$ten Ordnung, wenn $\frac{1}{\varphi(z)}$ für diesen Werth unendlich gross von der $n$ten Ordnung wird. Für diesen Fall ist nach § 29 und 30

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } z = a & \lim \frac{(z-a)^n}{\varphi(z)} \\ ,, \; z = \infty & \lim \frac{1}{z^n \varphi(z)} \end{array}\right\} \text{ weder Null noch unendlich gross.}$$

Da nun auch die umgekehrten Brüche endliche und von Null verschiedene Grenzwerthe haben müssen, so haben wir als Bedingungen dafür, dass $\varphi(z)$ für $z = \infty$ oder für einen endlichen Werth $z = a$ unendlich klein oder Null von der $n$ten Ordnung ist:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } z = a & \lim \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n} \\ ,, \; z = \infty & \lim z^n \varphi(z) \end{array}\right\} \text{ weder Null noch unendlich gross.}$$

Diese Bedingungen entstehen aus denen des unendlich gross Werdens, wenn $-n$ an die Stelle von n tritt, und daher kann man auch ein unendlich klein Werden als ein unendlich gross Werden von negativer Ordnung betrachten oder auch umgekehrt.

Wird $f(z)$ für $z = a$ Null von der $n$ten Ordnung, und setzt man

$$\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n} = \psi(z)$$

so ist nach dem Obigen $\psi(z)$ eine Function, welche für $z = a$ endlich und von Null verschieden ist. Hieraus folgt, dass man immer

$$\varphi(z) = (z-a)^n \psi(z)$$

setzen, also aus $\varphi(z)$ den Factor $(z-a)^n$ herausziehen kann. Setzt man $-n$ an die Stelle von n, so gilt dasselbe auch, wenn $\varphi(z)$ für $z=a$ unendlich gross von der $n$ten Ordnung wird. Dann kann man setzen

$$\varphi(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^n}.$$

Hierdurch rechtfertigt sich die oben (§ 29) angeführte Auffassungsweise, nach welcher ein unendlich Werden von der $n$ten Ordnung als n-maliges unendlich Werden von der ersten Ordnung betrachtet werden kann. Denn ist z. B. $\varphi(z)$ für zwei Puncte $z=a$ und $z=b$ unendlich klein von der ersten Ordnung, so ist zuerst

$$\varphi(z) = (z-a)\,\psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z=a$ endlich bleibt und für $z=b$ unendlich klein werden muss. Daher ist dann

$$\psi(z) = (z-b)\,\psi_1(z) \quad , \quad \varphi(z) = (z-a)\,(z-b)\,\psi_1(z),$$

wo $\psi_1(z)$ sowohl für $z=a$ als auch für $z=b$ endlich bleibt. Fallen nun die Puncte b und a zusammen, so entsteht

$$\varphi(z) = (z-a)^2\psi_1(z),$$

und daher ist dann $\varphi(z)$ für $z=a$ von der 2ten Ordnung unendlich klein. Beim unendlich gross Werden verhält sich die Sache ebenso.

Wird $\varphi(z)$ für $z=\infty$ unendlich klein von der $n$ten Ordnung, so ist

$$z^n\,\varphi(z) = \psi(z)$$

für $z=\infty$ endlich und von Null verschieden, und diese Gleichung gilt auch zugleich für das unendlich gross Werden, wenn $-n$ an Stelle von n gesetzt wird. Daher kann man in diesem Falle beim unendlich klein Werden von $\varphi(z)$

$$\varphi(z) = \frac{\psi(z)}{z^n}$$

und beim unendlich gross Werden

$$\varphi(z) = z^n\,\psi(z)$$

setzen, wo $\psi(z)$ eine für $z=\infty$ endlich und von Null verschieden bleibende Function bedeutet.

§ 35.

Hieran knüpft sich die Untersuchung, wie oft eine einwerthige Function in einem Gebiete unendlich klein oder gross von der ersten Ordnung wird, wobei ein unendlich Werden von der $n$ten Ordnung als n-maliges unendlich Werden von der ersten Ordnung aufgefasst wird. Diese Anzahl kann nämlich nach *Riemann* durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt werden. Innerhalb eines Gebietes T werde die einwerthige Function $\varphi(z)$ in den Puncten a_1, a_2, a_3, etc. unendlich klein oder gross, und zwar resp. von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, etc., die für ein unendlich klein Werden positiv, für ein unendlich gross Werden negativ zu nehmen seien. Wir betrachten nun das Integral

$$\int d \log \varphi(z) \quad \text{oder} \quad \int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\, dz,$$

bezogen auf die ganze Begrenzung von T. Die Function $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ wird unendlich gross für alle Puncte, in denen $\varphi(z)$ Null, und für alle diejenigen, in denen $\varphi'(z)$ unendlich gross ist. Nach § 24 bleibt aber $\varphi'(z)$ endlich in allen Puncten, in denen $\varphi(z)$ endlich ist, und wird nach § 29 in allen denen unendlich, in denen $\varphi(z)$ es ist; daher sind die Unstetigkeitspuncte von $\varphi'(z)$ innerhalb T identisch mit denen von $\varphi(z)$. Demnach wird $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ unendlich gross für die sämmtlichen Puncte a_1, a_2, a_3, etc., und nur für diese. Nach § 19 ist nun das obige auf die Begrenzung von T bezogene Integral gleich der Summe der Integrale ausgedehnt auf kleine, um die Puncte a beschriebene Kreise. Sei A eines dieser Integrale entsprechend dem Puncte a, bei welchem die Ordnung des unendlich Werdens gleich n sei. Dann kann man nach § 34 setzen

$$\varphi(z) = (z-a)^n \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z = a$ endlich und von Null verschieden bleibt. Hieraus folgt

$$A = \int d \log \varphi(z) = n \int \frac{dz}{z-a} + \int \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\, dz,$$

das Integral auf einen kleinen um a beschriebenen Kreis ausgedehnt. Da nun innerhalb des Integrationskreises $\psi(z)$ nicht null

und $\psi'(z)$ nicht unendlich gross ist, so ist $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ stetig und daher (§ 18)

$$\int \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} dz = 0.$$

Ausserdem ist (§ 20)

$$\int \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

und daher

$$A = 2\pi i n.$$

Summirt man diese Werthe A für alle Punkte a, so erhält man

$$\int d \log \varphi(z) = 2\pi i \, (n_1 + n_2 + n_3 + \ldots) = 2\pi i \Sigma n,$$

das Integral auf die Begrenzung von T ausgedehnt, und hierin giebt Σn an, wie oft $\varphi(z)$ innerhalb T unendlich gross oder klein von der ersten Ordnung wird, wenn man ein unendlich Werden n^{ter} Ordnung als n-maliges unendlich Werden erster Ordnung ansieht. Wir haben also den Satz: **Das Integral**

$$\int d \log \varphi(z)$$

(21) **einer einwerthigen Function $\varphi(z)$, bezogen auf die Begrenzung eines Gebietes T, ist gleich $2\pi i$ mal der Anzahl der Puncte, in denen $\varphi(z)$ innerhalb T unendlich klein oder gross von der ersten Ordnung ist.**

Bezieht man den Buchstaben n auf das unendlich klein Werden und deutet die Ordnungszahlen des unendlich gross Werdens durch $-\nu$ an, da sie negativ zu nehmen sind, so erhält man

$$\int d \log \varphi(z) = 2\pi i \, (\Sigma n - \Sigma \nu).$$

Wenn die Function $\varphi(z)$ innerhalb T endlich bleibt, so fällt aus der vorigen Formel das Glied $-\Sigma\nu$ fort, und **die Anzahl der Puncte, in denen eine einwerthige Function $\varphi(z)$ Null von der ersten Ordnung ist innerhalb eines Gebietes**
(22) **T, in welchem $\varphi(z)$ stetig bleibt, ist gleich**

$$\frac{1}{2\pi i} \int d \log \varphi(z),$$

das Integral auf die Begrenzung von T bezogen.

§ 36.

Wenn man nun unter den Puncten a alle endlichen Puncte versteht, in denen $\varphi(z)$ unendlich klein oder gross ist, so kommt es noch darauf an, wie sich $\varphi(z)$ für $z = \infty$ verhält. Nehmen wir an, $\varphi(z)$ werde für $z = \infty$ m Mal unendlich und zwar beziehe sich wieder ein positives m auf das unendlich klein, ein negatives m auf das unendlich gross Werden. Nimmt man dann als Begrenzung von T einen Kreis um den Nullpunct, welcher die sämmtlichen Puncte a umgiebt, so ist zunächst nach dem Vorigen auf diesen Kreis bezogen

$$\int d \log \varphi(z) = 2\pi i\,(\Sigma n - \Sigma \nu), \tag{23}$$

Führt man nun aber statt z eine neue Variable u durch die Beziehung

$$z = \frac{1}{u}$$

ein, so entspricht jedem Puncte z ein Punct u, und dem Puncte $z = \infty$ der Punct $u = 0$. Setzt man ferner

$$z = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

so wird

$$u = \frac{1}{r}\,(\cos\varphi - i \sin\varphi).$$

Beschreibt nun z eine geschlossene Linie Z um den Nullpunct, so beschreibt u, weil dabei φ von 0 bis 2π wächst, ebenfalls eine geschlossene Linie U um den Nullpunct, aber in umgekehrter Richtung. Lässt man ferner bei constantem φ den Radius Vector r wachsen, so nimmt $\frac{1}{r}$ ab und umgekehrt, folglich entsprechen allen Puncten z ausserhalb Z Puncte u, die innerhalb U liegen. Führt man jetzt in dem Integrale

$$\int d \log \varphi(z) \quad \text{oder} \quad \int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz$$

u statt z ein, indem man die aus $\varphi(z)$ dadurch hervorgehende Function mit $f(u)$ bezeichnet, so erhält man

$$\int d \log f(u) \quad \text{oder} \quad \int \frac{f'(u)}{f(u)}\,du.$$

In dem Integrale nach z ist die Integrationscurve Z ein alle Puncte a umschliessender Kreis um den Nullpunct, also ist in dem Integrale nach u die Integrationscurve auch ein Kreis um den Null-

punct, der aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird. Nimmt man daher bei beiden Integralen die Integration in der Richtung der wachsenden Winkel, so ist

$$\int d \log \varphi(z) = -\int d \log f(u),$$

das erste Integral auf den Kreis Z, das zweite auf den Kreis U bezogen. Der Kreis Z umgiebt alle Puncte a, also wird $\varphi(z)$ ausserhalb Z nur unendlich für $z = \infty$, und daher $f(u)$ innerhalb U nur unendlich für $u = 0$. Für $z = \infty$ war $\varphi(z)$ unendlich klein von der $m$ten Ordnung, sodass

$$\left[\lim z^m \varphi(z)\right]_{z=\infty} = \left[\lim \frac{f(u)}{u^m}\right]_{u=0}$$

endlich und von Null verschieden ist; demnach ist auch $f(u)$ für $u = 0$ unendlich klein von der $m$ten Ordnung, und setzt man

$$f(u) = u^m \psi(u),$$

so bedeutet $\psi(u)$ eine Function, welche in $u = 0$, also überall innerhalb U endlich und von Null verschieden ist. Nun folgt wieder

$$\int d \log f(u) = m \int \frac{du}{u} + \int \frac{\psi'(u)}{\psi(u)} du,$$

worin das zweite Integral verschwindet, und das erste, in der Richtung der wachsenden Winkel genommen, $= 2\pi i\, m$ ist. Demnach erhält man

$$\int d \log \varphi(z) = -\int d \log f(u) = -2\pi i . m.$$

Vergleicht man dies Resultat mit dem unter (23) gefundenen Werthe dieses auf dieselbe Curve bezogenen Integrales, so ergiebt sich

(24) $$\Sigma n - \Sigma \nu = -m.$$

Ist nun $\varphi(z)$ für $z = \infty$ Null, so ist m positiv, und man erhält

$$m + \Sigma n = \Sigma \nu;$$

ist aber $\varphi(z)$ für $z = \infty$ unendlich gross, so ist m negativ; schreibt man $-\mu$ dafür, so folgt

$$\Sigma n = \mu + \Sigma \nu.$$

In beiden Gleichungen giebt dann die linke Seite an, wie oft $\varphi(z)$ in der ganzen unendlichen Ebene Null von der ersten Ordnung, und die rechte Seite, wie oft diese Function unendlich gross von der ersten Ordnung wird, und wir erhalten den

allgemeinen Satz: Eine einwerthige Function wird in der ganzen unendlichen Ebene ebenso oft Null wie unendlich gross. Daraus folgt sogleich: eine einwerthige Function nimmt jeden beliebigen Werth k ebenso oft an, als sie unendlich gross wird. Denn $\varphi(z) - k$ wird ebenso unendlich gross wie $\varphi(z)$, daher wird $\varphi(z) - k$ ebenso oft Null, als $\varphi(z)$ unendlich gross wird, und folglich $\varphi(z)$ ebenso oft $= k$.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar der Fundamentalsatz der Algebra, denn eine ganze Function $n$ten Grades wird nur für $z = \infty$ unendlich gross und zwar n Mal, folglich muss sie auch n Mal Null werden, und daher muss eine Gleichung $n$ten Grades immer n Wurzeln haben.

§ 37.

Man kann nun den schon im § 32 bewiesenen Satz, dass eine einwerthige Function, welche nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich gross wird, eine rationale Function sein muss, auf's Neue und in einer andern Form beweisen.

Seien a_1, a_2, a_3, etc. die endlichen Werthe von z, für welche eine einwerthige Function $\varphi(z)$ unendlich klein oder gross wird, und mögen resp. n_1, n_2, n_3, etc. die Ordnungszahlen des Unendlichwerdens bedeuten, positiv beim unendlich klein, negativ beim unendlich gross Werden. Dann kann man zuerst nach § 34

$$\varphi(z) = (z - a_1)^{n_1} \psi(z)$$

setzen, wo $\psi(z)$ für $z = a_1$ endlich und von Null verschieden ist, aber für $z = a_2$, a_3, etc. unendlich wird. Alsdann ist

$$\psi(z) = (z - a_2)^{n_2} \psi_1(z),$$

wo nun

$$\psi_1(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - a_1)^{n_1} (z - a_2)^{n_2}}$$

für a_1 und a_2 nicht, wohl aber für a_3, etc. unendlich wird; fährt man so fort, so gelangt man zu einer Function

$$\lambda(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - a_1)^{n_1} (z - a_2)^{n_2} (z - a_3)^{n_3} \ldots\ldots} = \frac{\varphi(z)}{\Pi(z - a)^n},$$

welche für keinen endlichen Werth von z mehr unendlich wird.

Von dieser kann nun aber gezeigt werden, dass sie auch für $z = \infty$ nicht unendlich gross werden kann. Da nämlich

$$(z-a)^n = z^n \left(1-\frac{a}{z}\right)^n$$

ist, so kann man schreiben

$$\Pi (z-a)^n = z^{\Sigma n} \Pi \left(1-\frac{a}{z}\right)^n.$$

Bezeichnet aber m die Anzahl, wie oft $\varphi(z)$ für $z = \infty$ unendlich wird, positiv beim unendlich klein, negativ beim unendlich gross Werden, so ist (§ 36, (24))

$$\Sigma n = - m,$$

da hier Σn dasselbe bedeutet, was dort mit $\Sigma n - \Sigma \nu$ bezeichnet worden ist. Demnach hat man

$$\Pi (z-a)^n = z^{-m} \Pi \left(1-\frac{a}{z}\right)^n$$

und

$$\lambda(z) = \frac{z^m \varphi(z)}{\Pi \left(1-\frac{a}{z}\right)^n}.$$

Für $z = \infty$ aber ist

$$\lim \frac{z^m \varphi(z)}{\Pi \left(1-\frac{a}{z}\right)^n} = \lim z^m \varphi(z),$$

und dies ist nach § 34 endlich und von Null verschieden, da $\varphi(z)$ für $z = \infty$ von der $m$ten Ordnung unendlich klein wird. Folglich ist $\lambda(z)$ in der That eine Function, welche für $z = \infty$ endlich bleibt; da sie nun auch für keinen endlichen Werth von z unendlich gross wird, so muss sie nach § 28 eine Constante sein. Bezeichnet man diese mit C, so ist

$$\varphi(z) = C \Pi (z-a)^n.$$

Behält man nun a_1, a_2, a_3, etc, für die endlichen Werthe von z bei, für welche $\varphi(z)$ verschwindet, resp. von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, etc.; und bezeichnet mit α_1, α_2, α_3, etc. die endlichen Werthe, für welche $\varphi(z)$ unendlich gross wird, resp. von den Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3, etc., so ist

$$\varphi(z) = C \frac{(z-a_1)^{n_1} (z-a_2)^{n_2} (z-a_3)^{n_3} \cdots\cdots}{(z-\alpha_1)^{\nu_1} (z-\alpha_2)^{\nu_2} (z-\alpha_3)^{\nu_3} \cdots\cdots}$$

Demnach ist $\varphi(z)$ wirklich eine rationale Function, und zwar erscheint sie hier im Zähler und Nenner in Factoren aufgelöst, während sie in § 32 in Partialbrüche und eine ganze Function zerlegt war.

Hieraus folgt ferner: Eine einwerthige Function ist bis auf einen constanten Factor bestimmt, sobald man alle endlichen Werthe kennt, für welche sie unendlich klein und unendlich gross wird, und von jedem auch die Ordnungszahl des Unendlichwerdens, und: Zwei einwerthige Functionen, welche in diesen Werthen und in den Ordnungszahlen übereinstimmen, sind bis auf einen constanten Factor einander gleich. Diese Sätze bleiben auch noch richtig, wenn die Anzahl der Werthe, für welche eine Function unendlich wird, unendlich gross ist. Denn da bei zwei Functionen, die in diesen Werthen und zugleich in den Ordnungszahlen übereinstimmen, jeder solche Werth für jede der beiden Functionen den gleichen Factor im Zähler oder im Nenner liefert, so kann ihr Quotient nur eine Constante sein.

B. Functionen mit Verzweigungspuncten.

§ 38.

Indem wir nun zur Betrachtung von Functionen übergehen, welche Verzweigungspuncte besitzen, erinnern wir an die im Eingange dieses Abschnitts gemachte Bemerkung, deren Richtigkeit sich aus der Art, wie die vorigen Untersuchungen geführt worden sind, ergiebt, dass alle von einwerthigen Functionen geltenden Sätze, die sich nur auf endliche Flächentheile beziehen, auch für eine beliebige Function gültig bleiben, so lange dieselbe in dem zu betrachtenden Flächentheile einändrig ist, d. h. darin keine Verzweigungspuncte besitzt. Wir haben daher hier nur noch die Verzweigungspuncte selbst näher zu betrachten und knüpfen an die in § 21 angestellte Untersuchung an, welche Folgendes ergeben hat: Ist $z = b$ ein Verzweigungspunct einer Function $f(z)$, in welchem m Blätter der z-Fläche zusammenhängen (ein Windungspunct $(m-1)$ter Ordnung (§ 13)), und setzt man

$$(z-b)^{\frac{1}{m}} = \zeta,$$

wodurch $f(z)$ in $\varphi(\zeta)$ übergehe, so hat $\varphi(\zeta)$ an der $z=b$ entsprechenden Stelle $\zeta=0$ keinen Verzweigungspunct.

Man kann nun zuerst die Betrachtung des § 27 auf ein den Punct $\zeta=0$ umgebendes Gebiet anwenden, da man dasselbe immer so klein wählen kann, dass es keinen Verzweigungspunct enthält. Dann bleibt $\varphi(\zeta)$ an der Stelle $\zeta=0$ endlich und stetig, wenn

$$\left[\lim \zeta\varphi(\zeta)\right]_{\zeta=0}=0$$

ist; folglich erhalten wir als die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $f(z)$ in dem Verzweigungspuncte $z=b$ endlich und stetig bleibe:

$$\left[\lim (z-b)^{\frac{1}{m}}f(z)\right]_{z=b}=0.$$

Ferner ergeben die Betrachtungen des § 29, dass wenn $\varphi(\zeta)$ in dem Puncte $\zeta=0$ unendlich gross von der $n$ten Ordnung wird, man setzen kann

$$\varphi(\zeta)=\frac{g'}{\zeta}+\frac{g''}{\zeta^2}+\frac{g'''}{\zeta^3}+\cdots\cdot+\frac{g^{(n)}}{\zeta^n}+\lambda(\zeta),$$

wo $\lambda(\zeta)$ für $\zeta=0$ endlich bleibt, und die Grössen g constante Coefficienten bedeuten. Demnach hat man, wenn nun $f(z)$ in dem Verzweigungspuncte $z=b$ unendlich gross wird,

$$f(z)=\frac{g'}{(z-b)^{\frac{1}{m}}}+\frac{g''}{(z-b)^{\frac{2}{m}}}+\frac{g'''}{(z-b)^{\frac{3}{m}}}+\cdots\cdots+\frac{g^{(n)}}{(z-b)^{\frac{n}{m}}}+\psi(z),$$

wo $\psi(z)=\lambda(\zeta)$ sei, und für $z=b$ endlich bleibe. Dann ist

$\lim (z-b)^{\frac{n}{m}}f(z)$ endlich und von Null verschieden,

und man bezeichnet die Ordnung des Unendlichwerdens von $f(z)$ durch den Bruch $\frac{n}{m}$.

In b hängen m Blätter der z-Fläche zusammen, daher fallen hier auch m Functionswerthe auf einander. Jeder derselben, der mit w bezeichnet werden möge, wird so unendlich, dass

$$\lim w\,(z-b)^{\frac{n}{m}}$$

endlich und von Null verschieden bleibt. Demnach ist auch

$$\lim w^m(z-b)^n$$

weder Null noch unendlich, und daher kann man auch sagen: die Function w wird in b, wo m Blätter zusammenhängen, n Mal unendlich, wenn jeder der hier zusammenfallenden Werthe von der Ordnung $\frac{n}{m}$ unendlich wird.

Genauer bestimmt man die Art des Unendlichwerdens von $f(z)$, indem man den Ausdruck angiebt, um welchen sich $f(z)$ in b von einer dort endlich bleibenden Function unterscheidet. Dieser Ausdruck schreitet, wie die letzte Gleichung zeigt, nach ganzen Potenzen von $(z-b)^{-\frac{1}{m}}$ fort. Man sagt also z. B. $f(z)$ wird unendlich, wie $\frac{g'}{(z-b)^{\frac{1}{m}}}$, oder wie $\frac{g''}{(z-b)^{\frac{2}{m}}}$, oder wie $\frac{g'}{(z-b)^{\frac{1}{m}}} + \frac{g''}{(z-b)^{\frac{2}{m}}}$ u. s. w.

Betrachten wir nun noch den Werth $z = \infty$, welcher, wie wir schon § 14 gesehen haben, durch einen bestimmten Punct repräsentirt werden und dann auch als Verzweigungspunct auftreten kann. Man setze

$$z = \frac{1}{u} \text{ und } f(z) = \varphi(u);$$

dann ist $u = 0$ ein Windungspunct $(m-1)$ter Ordnung für $\varphi(u)$, wenn $z = \infty$ ein solcher für $f(z)$ ist. Demnach kann man setzen

$$\varphi(u) = \frac{g'}{u^{\frac{1}{m}}} + \frac{g''}{u^{\frac{2}{m}}} + \cdots + \frac{g^{(n)}}{u^{\frac{n}{m}}} + \lambda(u)$$

oder

$$f(z) = g'z^{\frac{1}{m}} + g''z^{\frac{2}{m}} + \cdots + g^{(n)}z^{\frac{n}{m}} + \psi(z), \tag{25}$$

wo $\psi(z) = \lambda(u)$ für $z = \infty$ endlich bleibt. Folglich ist $f(z)$ für $z = \infty$ endlich und stetig, wenn

$$\lim \left[\frac{f(z)}{z^{\frac{1}{m}}}\right]_{z=\infty} = 0$$

ist; und wenn in $z = \infty$ m Werthe der Function zusammenfallen, von denen jeder von der Ordnung $\frac{n}{m}$ unendlich gross wird, was der Fall ist, wenn

$$\lim \left[\frac{f(z)}{z^{\frac{n}{m}}}\right]_{z=\infty} \text{ endlich und von Null verschieden}$$

ist, so sagt man, $f(z)$ wird in $z=\infty$ n Mal unendlich.

§ 39.

Wir müssen nun auch das Verhalten der derivirten Function $\frac{dw}{dz}$ ($f(z)=w$ gesetzt) in einem Verzweigungspuncte näher ins Auge fassen. Zuerst betrachten wir nur solche endliche Puncte, in denen w endlich bleibt. Im § 24 ist gezeigt worden, dass wenn w in einem Gebiete endlich und einändrig ist, also darin weder Unstetigkeitspuncte noch Verzweigungspuncte besitzt, $\frac{dw}{dz}$ in demselben Gebiete ebenfalls endlich und stetig bleibt. Drückt man nun die Derivirte durch den Grenzwerth, dem sie gleich ist, aus, indem man den für $z=a$ stattfindenden Werth von w mit w_a bezeichnet, so hat man

$$\frac{dw}{dz}=\lim \frac{w-w_a}{z-a},$$

und kann demgemäss sagen: wenn $z=a$ weder ein Unstetigkeitspunct noch ein Verzweigungspunct von w ist, so ist

$$\lim \frac{w-w_a}{z-a} \text{ nicht unendlich gross.}$$

Man kann aber auch entscheiden, unter welcher Bedingung dieser Grenzwerth von Null verschieden bleibt. Dazu braucht man nur z als Function von w zu betrachten. Wenn nämlich der dem Puncte $z=a$ entsprechende Punct $w=w_a$ kein Verzweigungspunct der Function z ist, so ist nach dem Obigen

$$\lim \frac{z-a}{w-w_a} \text{ nicht unendlich gross,}$$

und daher der umgekehrte Bruch

$$\lim \frac{w-w_a}{z-a} \text{ nicht Null.}$$

Wir erhalten also zuerst folgenden Satz, der als Grundlage für das Folgende dient: Sind $z=a$ und $w=w_a$ zwei einander entsprechende endliche Puncte, und ist weder $z=a$ ein Verzweigungspunct von w, noch $w=w_a$ ein Verzweigungspunct von z, so ist

$$\lim \frac{w - w_a}{z - a} \text{ endlich und nicht Null.}$$

Daraus folgt, dass die Derivirte $\frac{dw}{dz}$ in einem endlichen Puncte (in dem auch w endlich ist) nur dann Null oder unendlich gross werden kann, wenn darin entweder für w, als Function von z, oder für z, als Function von w betrachtet, eine Verzweigung eintritt.

Tritt nun an die Stelle von a ein Verzweigungspunct b, in welchem aber w einen endlichen Werth w_b hat, so setze man, wenn die z-Fläche sich m Mal um b windet, (nach § 21)

$$(z - b)^{\frac{1}{m}} = \zeta;$$

dann hat w als Function von ζ betrachtet, an der Stelle $\zeta = 0$ weder einen Unstetigkeitspunct noch einen Verzweigungspunct. Nehmen wir nun den Fall an, dass auch ζ, als Function von w betrachtet, an der Stelle $w = w_b$ keinen Verzweigungspunct besitzt, so sind die Voraussetzungen des vorigen Satzes erfüllt, und daher ist

$$\lim \frac{w - w_b}{\zeta} \text{ oder } \lim \frac{w - w_b}{(z - b)^{\frac{1}{m}}} \text{ weder Null noch unendlich.}$$

Nun ist aber

$$z - b = \zeta^m,$$

also z eine rationale Function von ζ, und folglich nach § 15 eine ebenso verzweigte Function von w, wie ζ. Wenn daher ζ an der Stelle $w = w_b$ keinen Verzweigungspunct besitzt, so hat z, als Function von w betrachtet, dort ebenfalls keinen solchen, und daher erhalten wir folgenden Satz: Hat w in $z = b$ einen Windungspunct $(m-1)$ter Ordnung, z aber, als Function von w betrachtet, in $w = w_b$ keinen Verzweigungspunct, so ist

$$\lim \frac{w - w_b}{(z - b)^{\frac{1}{m}}} \text{ endlich und von Null verschieden.} \qquad (26)$$

Bezeichnet man diesen endlichen Grenzwerth mit k, so ist nun auch

$$\lim \frac{(w - w_b)^m}{z - b} = k^m;$$

es war aber

$$\lim \frac{w - w_b}{z - b} = \frac{dw}{dz},$$

also ist

$$\frac{dw}{dz} = \lim \frac{k^m}{(w - w_b)^{m-1}} = \lim \frac{k}{(z-b)^{\frac{m-1}{m}}}$$

(27) Unter der Voraussetzung des Satzes (26) wird also $\frac{dw}{dz}$ in b unendlich gross, und zwar so, dass

$\lim (w - w_b)^{m-1} \frac{dw}{dz}$ und $\lim (z-b)^{\frac{m-1}{m}} \frac{dw}{dz}$ weder Null noch unendlich ist.

Wenn dagegen ζ oder $(z-b)^{\frac{1}{m}}$ in $w = w_b$ einen Verzweigungspunct besitzt, und zwar einen solchen, in welchem μ Blätter der w-Fläche zusammenhängen, so treffen die Voraussetzungen des Satzes (26) in der Weise zu, dass ζ als Function von w in w_b einen Windungspunct $(\mu - 1)$ter Ordnung, w aber als Function von ζ in $\zeta = 0$ keinen Verzweigungspunct hat, und folglich ist dann

$$\lim \frac{\zeta}{(w - w_b)^{\frac{1}{\mu}}}$$

und also auch der umgekehrte Bruch

$$\lim \frac{(w - w_b)^{\frac{1}{\mu}}}{(z-b)^{\frac{1}{m}}} \text{ endlich und nicht Null.}$$

(28) Da nun wieder z und ζ gleichverzweigte Functionen von w sind, so schliessen wir: Hat w an der Stelle $z = b$ einen Windungspunct $(m-1)$ter Ordnung, und z als Function von w betrachtet an der entsprechenden Stelle $w = w_b$ einen Windungspunct $(\mu - 1)$ter Ordnung, so ist

$$\lim \frac{(w - w_b)^{\frac{1}{\mu}}}{(z-b)^{\frac{1}{m}}} \text{ endlich und von Null verschieden.}$$

Bezeichnet man diesen Grenzwerth mit h, so folgt

$$\lim \frac{(w - w_b)^{\frac{m}{\mu}}}{z - b} = h^m,$$

und da

$$\lim \frac{w - w_b}{z - b} = \frac{dw}{dz}$$

ist,

$$\frac{dw}{dz} = \lim. h^m (w - w_b)^{\frac{\mu - m}{\mu}} = \lim h^\mu (z - b)^{\frac{\mu - m}{m}}.$$

Demnach ist unter der Voraussetzung des Satzes (28) $\frac{dw}{dz}$ Null oder unendlich gross, je nachdem $\mu >$ oder $< m$ ist, und zwar so, dass

$\lim\, (w - w_b)^{\frac{m-\mu}{\mu}} \frac{dw}{dz}$ und $\lim\, (z - b)^{\frac{m-\mu}{m}} \frac{dw}{dz}$ weder Null noch unendlich ist. (29)

Wir haben nun noch den Werth $z = \infty$ zu betrachten, indem wir die Voraussetzung beibehalten, dass er einen Verzweigungspunct repräsentirt, in welchem aber w endlich ist. Sei

$$z = \frac{1}{u},$$

und w' der für $z = \infty$ oder $u = 0$ stattfindende Werth von w. Nehmen wir an, $z = \infty$ sei von w ein Windungspunct $(m-1)$ter Ordnung, $w = w'$ aber von z ein Windungspunct $(\mu - 1)$ter Ordnung, so erhalten wir nach (28), weil z und u gleichverzweigte Functionen von w sind, und auch die Verzweigung von w sich nicht ändert, ob man w als Function von z oder von u betrachtet,

$$\lim \left[\frac{(w - w')^{\frac{1}{\mu}}}{u^{\frac{1}{m}}} \right]_{u=0} \quad \text{oder} \quad \left[\lim\, z^{\frac{1}{m}} (w - w')^{\frac{1}{\mu}} \right]_{z=\infty} \tag{30}$$

endlich und nicht Null,

und wenn dieser Grenzwerth mit h bezeichnet wird (nach (29))

$$\frac{dw}{du} = \lim h^m (w - w')^{\frac{\mu - m}{\mu}} = \lim h^\mu u^{\frac{\mu - m}{m}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2} \frac{dw}{du}$$

also

$$\frac{dw}{dz} = -\lim \frac{h^m (w - w')^{\frac{\mu - m}{\mu}}}{z^2} = -\lim \frac{h^\mu u^{\frac{\mu - m}{m}}}{z^2}$$

oder

$$\frac{dw}{dz} = -\lim \frac{(w - w')^{\frac{\mu + m}{\mu}}}{h^m} = -\lim \frac{h^\mu}{z^{\frac{\mu + m}{m}}}.$$

(31) Demnach ist hier $\frac{dw}{dz}$ Null und zwar so, dass die Ausdrücke

$$z^2 (w - w')^{\frac{m-\mu}{\mu}} \frac{dw}{dz}, \quad \frac{1}{(w-w')^{\frac{\mu+m}{\mu}}} \frac{dw}{dz}, \quad z^{\frac{\mu+m}{m}} \frac{dw}{dz}$$

endliche und von Null verschiedene Grenzwerthe haben.

Endlich wenden wir uns zur Betrachtung des Falles, dass w selbst in einem Verzweigungspuncte unendlich gross wird, und nehmen letzteren zuerst endlich $= b$ an. Hängen nun in $z = b$ m Blätter und in $w = \infty$ μ Blätter zusammen, so können wir sofort aus (30) erkennen, welcher Ausdruck endlich und von Null verschieden bleibt. Denn setzen wir dort $z - b$ an die Stelle von $w - w'$, ferner w an die Stelle von z und vertauschen m mit μ mit einander, so ergiebt sich, dass

$$\lim w^{\frac{1}{\mu}} (z-b)^{\frac{1}{m}} = h$$

endlich und von Null verschieden bleibt. Da nun hieraus aber

$$\lim w (z-b)^{\frac{\mu}{m}} = h^{\mu}$$

folgt, so dass auch dieser Grenzwerth weder Null noch unendlich gross ist, so ergiebt sich (nach § 38), dass w in diesem Falle unendlich gross von der Ordnung $\frac{\mu}{m}$ ist; und zugleich gilt auch das Umgekehrte. Indem wir ferner in dem zweiten der Ausdrücke (31) dieselben Vertauschungen vornehmen, wie oben, sehen wir, dass

$$\frac{1}{(z-b)^{\frac{m+\mu}{m}}} \frac{dz}{dw}$$

und also auch der reciproke Werth

$$(z-b)^{\frac{m+\mu}{m}} \frac{dw}{dz}$$

endlich und nicht Null ist, und dass also $\frac{dw}{dz}$ unendlich gross ist von der Ordnung $\frac{m+\mu}{m}$. Das Resultat ist daher: Wird w in einem Windungspuncte $(m-1)$ter Ordnung $z = b$ unendlich gross von der Ordnung $\frac{\mu}{m}$, so ist $w = \infty$ selbst zugleich ein Windungspunct $(\mu - 1)$ter Ordnung, und

umgekehrt; und $\frac{dw}{dz}$ wird von der Ordnung $\frac{m+\mu}{m}$ unendlich gross.

Wird zweitens w für $z = \infty$ unendlich gross, und ist dieser Punct ein Windungspunct $(m-1)$ter Ordnung, während $w = \infty$ ein Windungspunct $(\mu - 1)$ter Ordnung ist, so setze man $z = \frac{1}{u}$; dann ist nach dem vorigen Satze für $u = 0$

$$\lim w \,.\, u^{\frac{\mu}{m}}$$

und daher für $z = \infty$

$$\lim \frac{w}{z^{\frac{\mu}{m}}}$$

endlich und von Null verschieden, und folglich w unendlich gross von der Ordnung $\frac{\mu}{m}$. Ferner bleibt für $u = 0$

$$\lim u^{\frac{m+\mu}{m}} \frac{dw}{du},$$

und für $z = \infty$

$$\lim \frac{1}{z^{\frac{m+\mu}{m}}} \frac{dw}{du}$$

endlich und von Null verschieden. Da nun

$$\frac{dw}{du} = -z^2 \frac{dw}{dz}$$

ist, so ist

$$\lim z^{\frac{m-\mu}{m}} \frac{dw}{dz}$$

für $z = \infty$ endlich und nicht Null, und daher $\frac{dw}{dz}$ entweder Null oder unendlich gross, je nachdem $m >$ oder $< \mu$ ist.

Hat man z. B. die Gleichung

$$(w-w')^3 (z-b)^5 = 1,$$

iso st

$$w - w' = \frac{1}{(z-b)^{\frac{5}{3}}} \quad \text{und} \quad z - b = \frac{1}{(w-w')^{\frac{3}{5}}},$$

also ist w für $z = b$ unendlich gross von der Ordnung $\frac{5}{3}$. Zugleich hängen an der Stelle $z = b$ drei Blätter der z-Fläche, und an der entsprechenden Stelle $w = \infty$ fünf Blätter der w-Fläche zusammen. Ferner ist

$$\frac{dw}{dz} = -\tfrac{3}{5} \cdot \frac{1}{(z-b)^{\frac{8}{5}}},$$

also für $z = b$ unendlich gross von der Ordnung $\frac{8}{5}$.

Bei den Gleichungen

$$w = z^{\frac{3}{5}} \qquad \text{und} \qquad w = z^{\frac{5}{3}}$$

sind die Stellen $z = \infty$ und $w = \infty$ entsprechend. Man erhält resp.

$$\frac{dw}{dz} = \tfrac{3}{5} \cdot \frac{1}{z^{\frac{2}{5}}} \qquad \text{und} \quad \frac{dw}{dz} = \tfrac{5}{3}\, z^{\frac{2}{3}},$$

daher ist $\frac{dw}{dz}$ für $z = \infty$ im ersten Falle Null, und im zweiten unendlich gross.

§ 40.

Wir können nun auch angeben, in welcher Weise sich die Fläche der z auf der Fläche der w in der Nähe eines Verzweigungspunctes abbildet, und damit die in § 7 erwähnten Ausnahmefälle erledigen.

Nehmen wir an, $z = b$ sei ein Windungspunct $(m - 1)$ter, und $w = w_b$ ein Windungspunct $(\mu - 1)$ter Ordnung, so hat (28)

$$\lim \frac{(w - w_b)^{\frac{1}{\mu}}}{(z-b)^{\frac{1}{m}}}$$

einen bestimmten endlichen und von Null verschiedenen Grenzwerth. Nähert man sich also von verschiedenen Seiten her den Puncten $z = b$ und $w = w_b$, so ist es dieser Ausdruck, und nicht mehr, wie in § 7, der Ausdruck $\lim \frac{w - w_b}{z - b}$, welcher einen von der Richtung der Annäherung unabhängigen endlichen Werth hat. Sind demnach z' und z'' zwei an b in verschiedener Richtung unendlich nahe liegende Puncte, w' und w'' die ihnen entsprechenden Puncte der w-Fläche, so ist

$$\frac{(w' - w_b)^{\frac{1}{\mu}}}{(z'-b)^{\frac{1}{m}}} = \frac{(w'' - w_b)^{\frac{1}{\mu}}}{(z''-b)^{\frac{1}{m}}}$$

oder

$$\left(\frac{w' - w_b}{w'' - w_b}\right)^{\frac{1}{\mu}} = \left(\frac{z' - b}{z'' - b}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} w' - w_b &= \varrho' \,(\cos \psi' + i \sin \psi') \\ w'' - w_b &= \varrho'' \,(\cos \psi'' + i \sin \psi'') \\ z' - b &= r' \,(\cos \varphi' + i \sin \varphi') \\ z'' - b &= r'' \,(\cos \varphi'' + i \sin \varphi''), \end{aligned}$$

so folgt

$$\left(\frac{\varrho'}{\varrho''}\right)^{\frac{1}{\mu}} \left(\cos \frac{\psi' - \psi''}{\mu} + i \sin \frac{\psi' - \psi''}{\mu}\right) = \left(\frac{r'}{r''}\right)^{\frac{1}{m}} \left(\cos \frac{\varphi' - \varphi''}{m} + i \sin \frac{\varphi' - \varphi''}{m}\right)$$

und hieraus

$$\left(\frac{\varrho'}{\varrho''}\right)^{\frac{1}{\mu}} = \left(\frac{r'}{r''}\right)^{\frac{1}{m}}; \quad \frac{\psi' - \psi''}{\mu} = \frac{\varphi' - \varphi''}{m}$$

oder

$$\left(\frac{\varrho'}{\varrho''}\right)^{m} = \left(\frac{r'}{r''}\right)^{\mu}; \quad m\,(\psi' - \psi'') = \mu\,(\varphi' - \varphi'').$$

Es findet also in der Nähe des Verzweigungspunctes nicht mehr Aehnlichkeit in den unendlich kleinen Theilen statt.

In dem in § 7 angeführten Beispiele

$$w = z^2$$

ist $m = 1$ und $\mu = 2$, folglich wird für den Verzweigungspunct $w = 0$, (entsprechend $z = 0$) $\frac{dw}{dz} = 0$, da $\mu > m$ ist; zugleich ist

$$\frac{\varrho'}{\varrho''} = \left(\frac{r'}{r''}\right)^2 \qquad \psi' - \psi'' = 2\,(\varphi' - \varphi''),$$

was sich auch schon § 7 in einem bestimmten Falle ergeben hatte. Eine unmittelbare Folge hiervon ist u. a. der von *Siebeck**) auf andere Weise bewiesene Satz: Der Winkel, unter welchem sich zwei confocale Parabeln schneiden, ist halb so gross, als der Winkel, den ihre Axen mit einander bilden. Man überzeugt sich nämlich nach dem § 7 angegebenen Verfahren oder auch auf andere Weise leicht, dass jeder nicht durch den Nullpunct gehenden Geraden in z eine Parabel in w entspricht, deren Brennpunct im Nullpuncte liegt, und deren Axe einer Geraden in z entspricht, die ebenfalls durch

*) *Siebeck:* Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen. Crelle's Journ. Bd. 55. pag. 239.

den Nullpunct geht und der früheren Geraden parallel ist. Der Winkel, welchen zwei nicht durch den Nullpunct gehende Gerade in z mit einander bilden, ist nun ebenso gross, wie der Winkel, unter dem sich die entsprechenden Parabeln in w schneiden; unter demselben Winkel schneiden sich auch die durch den Nullpunct gehenden parallelen Geraden in z, welchen die Axen der Parabeln in w entsprechen. Da aber der Nullpunct Verzweigungspunct von z ist, und zwar $m = 1$ und $\mu = 2$, so bilden die Axen der Parabeln den doppelten Winkel mit einander.

Ausserdem erhellt aus der obigen allgemeinen Betrachtung, dass die Puncte der w-Fläche, welche *Siebeck* Brennpuncte nennt, und die dadurch characterisirt sind, dass in ihnen $\frac{dw}{dz} = 0$ ist, zugleich Verzweigungspuncte sein werden, und zwar solche, für welche $\mu > m$ ist.

§ 41.

Wenn eine Function w für jeden Werth von z n Werthe besitzt und nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich wird, so ist sie eine algebraische Function.

Man bezeichne mit $w_1, w_2, \ldots. w_n$ die n Werthe von w, welche einem bestimmten Werthe von z entsprechen. Bildet man nun das Product

$$S = (\sigma - w_1)\ (\sigma - w_2) \cdots (\sigma - w_n),$$

worin σ eine beliebige von z unabhängige Grösse bedeutet, so ist S symmetrisch in Bezug auf $w_1, w_2, \ldots w_n$. Lässt man z irgend eine scheinbar geschlossene (§ 12) Linie beschreiben, so werden zwar einige oder alle der Werthe $w_1, w_2, \ldots w_n$ sich geändert haben, aber in den n unmittelbar über einander liegenden Puncten der z-Fläche wird w wieder die nämlichen Werthe nur in anderer Anordnung besitzen, folglich hat sich S, als Function von z betrachtet, dabei nicht geändert. S ist also in allen Puncten einändrig, und daher eine einwerthige Function von z. Ausserdem wird S nur da unendlich gross, wo einer oder mehrere der Werthe $w_1, w_2, \ldots w_n$ unendlich gross werden. Jeder der letzteren wird der Annahme nach nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich, also findet dasselbe auch bei S statt. Demnach ist S eine einwerthige Function, welche nur

eine endliche Anzahl von Malen unendlich wird, und daher nach § 32 eine rationale Function von z. Ist nun $z = a$ ein Unstetigkeitspunct von w, der nicht zugleich ein Verzweigungspunct ist, und ist in diesem w_k unendlich gross, und zwar α Mal, so ist

$$w_k\ (z - a)^{\alpha} \text{ und also auch } (\sigma - w_k)\ (z - a)^{\alpha}$$

in a endlich (§ 29). Ist ferner $z = b$ zugleich Unstetigkeitspunct und Verzweigungspunct, und hängen in demselben μ Blätter zusammen, so fallen in ihm auch μ Werthe von w auf einander. Bezeichnet man diese mit $w_1, w_2, \ldots w_\mu$, und mit β die Anzahl der Male, wie oft w in b unendlich gross wird, so sind nach § 38 die Grössen

$$w_1\ (z - b)^{\frac{\beta}{\mu}},\quad w_2\ (z - b)^{\frac{\beta}{\mu}}, \cdots\cdots\ w_\mu\ (z - b)^{\frac{\beta}{\mu}}$$

und folglich auch

$$(\sigma - w_1)\ (z - b)^{\frac{\beta}{\mu}},\ (\sigma - w_2)\ (z - b)^{\frac{\beta}{\mu}}, \cdots\cdots (\sigma - w_\mu)\ (z - b)^{\frac{\beta}{\mu}}$$

endlich. Demnach bleibt auch ihr Product

$$(\sigma - w_1)\ (\sigma - w_2) \cdots\cdots (\sigma - w_\mu)\ (z - b)^{\beta}$$

in b endlich. Nun seien

$$a_1,\ a_2, \cdots\cdots a_\lambda$$

die Unstetigkeitspuncte, die nicht Verzweigungspuncte sind,

$$b_1,\ b_2, \cdots\cdots b_\nu$$

die Unstetigkeitspuncte, die zugleich Verzweigungspuncte sind, und man bezeichne die zugehörigen Ordnungszahlen α und β mit entsprechenden Indices. Multiplicirt man dann S mit dem Ausdruck

$$Z = (z - a_1)^{\alpha_1}(z - a_2)^{\alpha_2} \cdots\cdots (z - a_\lambda)^{\alpha_\lambda}$$
$$(z - b_1)^{\beta_1}(z - b_2)^{\beta_2} \cdots\cdots (z - b_\nu)^{\beta_\nu},$$

so bleibt das Product

$$S \cdot Z = (\sigma - w_1)\ (\sigma - w_2) \cdots\cdots (\sigma - w_n)\ (z - a_1)^{\alpha_1}(z - a_2)^{\alpha_2}$$
$$\cdots\cdots (z - a_\lambda)^{\alpha_\lambda}(z - b_1)^{\beta_1}(z - b_2)^{\beta_2} \cdots (z - b_\nu)^{\beta_\nu}$$

für alle Werthe a und b, also überhaupt für alle endlichen Werthe von z endlich. Demnach ist SZ eine einwerthige Function, welche nur für $z = \infty$ und auch hier nur von einer endlichen Ordnung unendlich gross wird; folglich ist (nach § 31) SZ eine ganze Function von z. Nun wird in SZ zuerst jeder

Factor von Z für $z = \infty$ unendlich gross; bezeichnet ferner h die Anzahl der Male, wie oft w für $z = \infty$ unendlich gross wird, so ist die Anzahl der Male, wie oft SZ für $z = \infty$ unendlich gross ist, gleich

$$h + \Sigma\alpha + \Sigma\beta = m,$$

und dies ist gerade die Anzahl der Male, wie oft w überhaupt unendlich gross wird. Bezeichnet man diese Zahl mit m, so ist SZ eine ganze Function vom $m$ten Grade von z. Nimmt man nun auf die Grösse σ Rücksicht, so ist SZ auch eine ganze Function von σ vom $n$ten Grade. Denkt man sich also SZ nach Potenzen von σ geordnet, so kann man sagen, dass SZ eine ganze Function von σ vom $n$ten Grade ist, deren Coefficienten ganze Functionen von z sind, die bis auf den $m$ten Grad steigen, was *Riemann* durch das Zeichen

$$F(\overset{n}{\sigma}, \overset{m}{z})$$

auszudrücken pflegt. Diese Grösse verschwindet, wenn σ einen der Werthe $w_1, w_2, \cdots w_n$ erhält, und daher sind dies die n Wurzeln der Gleichung

$$F(\overset{n}{w}, \overset{m}{z}) = 0.$$

Folglich ist eine n-werthige Function, die m Mal unendlich wird, die Wurzel einer algebraischen Gleichung zwischen w und z, die in Bezug auf w vom $n$ten, und deren Coefficienten in Bezug auf z vom $m$ten Grade sind.

Achter Abschnitt.

Integrale.

A. Integrale über geschlossene Linien ausgedehnt.

§ 42.

Wir schreiten jetzt zu einer Vervollständigung der im Abschnitte IV. gegebenen Sätze. Nach den im vorigen Abschnitte

festgestellten Begriffen über das Unendlichwerden der Functionen können wir den in § 20 abgeleiteten Satz so aussprechen: Bezieht man das Integral

$$\int f(z)\, dz$$

auf eine geschlossene Linie, die nur einen Unstetigkeitspunct a umgiebt, welcher kein Verzweigungspunct ist, und in welchem $f(z)$ von der ersten Ordnung unendlich gross wird, so ist

$$\int f(z)\, dz = 2\pi i \lim (z-a)\, f(z).$$

Wir untersuchen nun den Werth dieses Integrals, wenn $f(z)$ in a unendlich gross von der $n$ten Ordnung ist. Nach § 29 ist in der Nachbarschaft des Punctes a

$$f(z) = \frac{c'}{z-a} + \frac{c''}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c^{(k)}}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{c^{(n)}}{(z-a)^n} + \psi(z), \quad (32)$$

wo $\psi(z)$ für $z = a$ endlich und stetig bleibt. Bildet man nun $\int f(z)\, dz$ in Bezug auf eine den Punct a umgebende geschlossene Linie, so kann man dazu einen beliebig kleinen um a beschriebenen Kreis wählen und hat dann zuerst

$$\int \psi(z)\, dz = 0,$$

ferner

$$\int \frac{c'\, dz}{z-a} = 2\pi i c'.$$

Setzt man ferner

$$z - a = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

so folgt

$$\int \frac{c^{(k+1)}\, dz}{(z-a)^{k+1}} = \int \frac{c^{(k+1)}}{(z-a)^k} \frac{dz}{z-a} = \frac{c^{(k+1)}\, i}{r^k} \int_0^{2\pi} (\cos k\varphi - i \sin k\varphi)\, d\varphi.$$

Dieses Integral verschwindet aber, weil für jeden von 0 verschiedenen ganzzahligen Werth von k

$$\int_0^{2\pi} \cos k\varphi\, d\varphi = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \sin k\varphi\, d\varphi = 0$$

ist. Demnach ist für jeden von 1 verschiedenen Werth von k

$$\int \frac{c^{(k)}\, dz}{(z-a)^k} = 0.$$

Aus dem Ausdrucke (32) verschwinden also bei der Integration alle Glieder mit Ausnahme des ersten, und man hat

$$\int f(z)\, dz = 2\pi i \cdot c'.$$

Demnach ist dies Integral stets gleich Null, wenn in dem Ausdrucke, der die Art des Unendlichwerdens von $f(z)$ angiebt, das Glied $\frac{c'}{z-a}$ fehlt; beim Vorhandensein dieses Gliedes aber hat das Integral den Werth $2\pi i\, c'$.

Gehen wir jetzt zu einem Verzweigungspuncte über. Ist b ein Unstetigkeitspunct, in welchem m Blätter der z-Fläche zusammenhängen, so hat man in der Nachbarschaft des Punctes b (§ 38)

(33) $$f(z) = \frac{g'}{(z-b)^{\frac{1}{m}}} + \frac{g''}{(z-b)^{\frac{2}{m}}} + \cdots + \frac{g^{(m)}}{z-b} + \cdots + \frac{g^{(k)}}{(z-b)^{\frac{k}{m}}} + \cdots + \frac{g^{(n)}}{(z-b)^{\frac{n}{m}}} + \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ in $z = b$ endlich und stetig ist. Bildet man nun $\int f(z)\, dz$ bezogen auf eine den Punct b umgebende geschlossene Linie, so kann man dazu einen beliebig kleinen Kreis wählen, dessen Peripherie aber m Mal durchlaufen werden muss, damit er geschlossen sei. Nun ist wieder zuerst

$$\int \psi(z)\, dz = 0,$$

ferner für

$$z - b = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\int \frac{g^{(m)} dz}{z-b} = \int_0^{2m\pi} g^{(m)} i\, d\varphi = 2m\pi i g^{(m)}.$$

Bedeutet endlich k eine von m verschiedene ganze Zahl, so ist

$$\int \frac{g^{(k)} dz}{(z-b)^{\frac{k}{m}}} = g^{(k)} \int \frac{dz}{(z-b)^{\frac{k-m}{m}}(z-b)}$$

$$= \frac{g^{(k)} i}{r^{\frac{k-m}{m}}} \int_0^{2m\pi} \left(\cos\frac{k-m}{m}\varphi - i\sin\frac{k-m}{m}\varphi\right) d\varphi.$$

Nun ist aber wieder

$$\int_0^{2m\pi} \cos\frac{k-m}{m}\varphi\, d\varphi = 0 \quad , \quad \int_0^{2m\pi} \sin\frac{k-m}{m}\varphi\, d\varphi = 0,$$

so lange k nicht gleich m ist, und daher ist auch

$$\int \frac{g^{(k)} dz}{(z-b)^{\frac{k}{m}}} = 0.$$

Demnach verschwinden bei der Integration des Ausdruckes (33) alle Glieder mit Ausnahme von $\frac{g^{(m)}}{z-b}$, und folglich ist

$$\int f(z)\, dz = 2m\pi i g^{(m)}.$$

Hiernach verschwindet auch dieses Integral immer dann, wenn in dem Ausdrucke, welcher die Art des Unendlichwerdens von $f(z)$ angiebt, das Glied $\frac{g^{(m)}}{z-b}$ fehlt, und man kann allgemein den Satz aussprechen: Das Integral $\int f(z) dz$ genommen um einen Unstetigkeitspunct, um welchen die z-Fläche sich m Mal windet, hat dann und nur dann einen von Null verschiedenen Werth, wenn in dem Ausdrucke, welcher die Art des Unendlichwerdens von $f(z)$ angiebt, das Glied, das von der ersten Ordnung unendlich gross wird, vorhanden ist; und dieser Werth ist dann gleich $2m\pi i$ mal dem Coefficienten dieses Gliedes. Wenn der Unstetigkeitspunct kein Verzweigungspunct ist, braucht man nur $m = 1$ zu setzen.

§ 43.

Schon im § 14 ist der Vorstellungsart gedacht worden, nach welcher man sich die unendliche Ebene als eine Kugel mit unendlich grossem Radius, also als eine geschlossene Fläche, und dann den Werth $z = \infty$ durch einen bestimmten Punct repräsentirt denken kann. In diesem Falle kann man auch von geschlossenen Linien reden, welche den unendlich entfernten Punct umgeben. Wir wollen nun untersuchen, wie sich Integrale verhalten, wenn sie auf solche geschlossene Linien bezogen werden. Diese bilden, auch wenn man sich die unendlich grosse Kugel wieder in der Ebene ausgebreitet denkt, geschlossene Linien, aber dasjenige von der Linie begrenzte Gebiet, welches den Punct $z = \infty$ enthält, liegt in der Ebene ausserhalb der geschlossenen Linie.

Führt man statt z eine andere Variable u ein, indem man

$$z - h = \frac{1}{u - k}$$

und dann

$$f(z) = \varphi(u)$$

setzt, wo h und k zwei beliebig zu wählende Puncte bedeuten mögen, so entspricht jedem Puncte z ein Punct u und umgekehrt. Den Puncten $z = h$ und $u = k$ aber entsprechen resp. $u = \infty$ und $z = \infty$. Setzt man

$$z - h = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so wird

$$u - k = \frac{1}{r}\,(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Beschreibt nun z eine geschlossene Linie Z, welche den Punct h umgiebt, so wächst φ von 0 bis zu einem Vielfachen von 2π; daher umgiebt auch die entsprechende, von u beschriebene Linie U den Punct k, und zwar in ebenso vielen Umläufen, wird aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Geht ferner z von der Peripherie von Z nach aussen, so wächst r, oder der Modul von $z - h$, folglich nimmt $\frac{1}{r}$, oder der Modul von $u - k$ ab, und daher geht u von der Peripherie von U nach innen. Demnach entsprechen allen ausserhalb Z liegenden Puncten z solche Puncte u, die innerhalb U liegen. Betrachtet man jetzt die Curve Z als die Begrenzung des ausserhalb liegenden Flächentheils, so ist die positive Begrenzungsrichtung für diesen die entgegengesetzte, wie für den inneren Flächentheil; daher werden Z und U gleichzeitig in der positiven Begrenzungsrichtung der einander entsprechenden Flächentheile durchlaufen.

Nun ist

$$f(z) = \varphi(u) \quad , \quad dz = -\frac{du}{(u-k)^2},$$

also erhält man

$$\int f(z)\,dz = -\int \frac{\varphi(u)\,du}{(u-k)^2},$$

und darin bezieht sich das erste Integral auf die Curve Z, und das zweite auf die entsprechende Curve U, auf beide in positiver Begrenzungsrichtung erstreckt. Hat man nun bei einer geschlossenen Fläche eine Curve Z, welche den Punct ∞ umgiebt, so ist diese in der Ebene eine geschlossene Linie, welche den ausserhalb liegenden Flächentheil begrenzt. Der beliebig anzunehmende

Punct h kann immer so gewählt werden, dass er innerhalb der Curve Z liegt, dann entspricht der Flächentheil, welcher den Punct $z = \infty$ enthält, dem innerhalb U liegenden Flächentheile, und auf die positiven Begrenzungen dieser Flächentheile erstreckt gilt die vorige Gleichung

$$\int f(z)\,dz = -\int \frac{\varphi(u)\,du}{(u-k)^2}.$$

Der Werth des Begrenzungsintegrales $\int f(z)\,dz$ hängt also von der Beschaffenheit der Function $\frac{\varphi(u)}{(u-k)^2}$ ab. Nun braucht man nur solche Curven Z zu betrachten, welche abgesehen von dem Puncte $z = \infty$ keine Unstetigkeitspuncte enthalten, dann wird auch $\varphi(u)$ innerhalb U höchstens für $u = k$ unendlich gross; es kommt also darauf an, ob und wie $\frac{\varphi(u)}{(u-k)^2}$ für $u = k$ unendlich gross ist. Dieser Ausdruck ist gleich $(z-h)^2 f(z)$, und da für $z = \infty$

$$\lim\,(z-h)^2 f(z) = \lim\, z^2 f(z)$$

ist, so ergiebt sich, dass zur Ermittelung unseres Begrenzungsintegrals nicht sowohl die Beschaffenheit der Function $f(z)$ als vielmehr die der Function $z^2 f(z)$ im Puncte $z = \infty$ maassgebend ist. Legt man aber diese zu Grunde, so bleiben alle früheren Sätze, die von Begrenzungsintegralen gelten, auch für solche geschlossene Linien gültig, die den Punct ∞ umgeben, nur ist dabei zu berücksichtigen, dass wenn das Integral in der positiven Begrenzungsrichtung des Flächenstücks, das den Punct ∞ enthält, genommen wird, der Integralwerth das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten muss. Ist also $z^2 f(z)$ für $z = \infty$ endlich, d. h. ist

$$\lim\, z\, f(z) = 0,$$

so ist das Integral Null; es genügt also hierzu nicht, dass $f(z)$ endlich bleibe, es muss vielmehr unendlich klein mindestens von der zweiten Ordnung sein. Ist ferner $z^2 f(z)$ unendlich gross von der ersten Ordnung, d. h. ist

$$\lim\, z\, f(z) \text{ endlich und von Null verschieden,}$$

so ist

$$\int f(z)\,dz = -\,2\pi i \lim\, z\, f(z),$$

das Integral in der positiven Begrenzungsrichtung um den Punct ∞ genommen. Im Allgemeinen hat das Integral dann und nur dann einen von Null verschiedenen Werth, wenn in der Entwickelung von $f(z)$ nach steigenden und fallenden Potenzen von z, ein Glied von der Form

$$\frac{g}{z}$$

vorhanden ist.

Als Beispiel diene zuerst

$$\int \frac{dz}{1+z^2};$$

hier ist

$$\lim z\,f(z) = \lim \frac{z}{1+z^2} = \lim \frac{1}{\frac{1}{z}+z} = 0,$$

also ist das Integral, bezogen auf eine den Punct ∞ umgebende Linie, gleich Null. In der That ist jede, die beiden Puncte $z = -i$ und $z = +i$ umgebende Linie zugleich eine den Punct ∞ umgebende, da die Function weiter keine Unstetigkeitspuncte hat, und wir haben schon § 20 gesehen, dass für eine solche Linie das vorliegende Integral den Werth Null hat.

Zweitens. Wird das Integral

$$\int \frac{dz}{z}$$

auf eine Linie um den Nullpunct in der Richtung der wachsenden Winkel bezogen, so hat es den Werth $2\pi i$. Dieselbe Linie ist aber auch eine den Punct ∞ umgebende, da die Function $f(z) = \frac{1}{z}$ nur den einen Unstetigkeitspunct $z = 0$ besitzt. Obgleich nun hier $f(z)$ für $z = \infty$ nicht unendlich gross ist, so hat doch das Integral einen von Null verschiedenen Werth, weil

$$\Big[\lim z\,f(z)\Big]_{z=\infty} = \lim z\frac{1}{z} = 1$$

ist. Man erhält demnach

$$\int \frac{dz}{z} = -2\pi i,$$

und in der That muss die Linie in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden, wenn sie den Theil in positiver Richtung begrenzt, der den Punct ∞ enthält.

Drittens kann man hiernach den Werth des Integrals

$$J = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

ermitteln, wenn es auf eine im ersten Blatte verlaufende Linie ausgedehnt wird, welche die beiden Unstetigkeits- und Verzweigungspuncte $+1$ und -1 umgiebt. Denn eine solche umgiebt zugleich den Punct ∞, ohne einen weiteren Unstetigkeitspunct einzuschliessen. Nun ist hier

$$\lim z f(z) = \lim \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \lim \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}} = \pm \frac{1}{i},$$

also wird

$$J = \pm 2\pi,$$

wo über das Zeichen noch zu entscheiden ist. Nun kann aber andrerseits die Linie, welche die Puncte $+1$ und -1 umgiebt, bis an den Verzweigungsschnitt heran verengert werden. Setzt man dann fest, dass die Quadratwurzel auf der linken Seite des Verzweigungsschnittes, in der Richtung von -1 nach $+1$ genommen, im ersten Blatte das Vorzeichen $+$, und daher auf der rechten Seite desselben, ebenfalls im ersten Blatte, das Vorzeichen $-$ habe (vgl. § 13), so ist auch, in der Richtung der abnehmenden Winkel integrirt, (um den Punct ∞ herum in der positiven Begrenzungsrichtung)

$$J = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 2\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 4\int_{0}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Da nun hier alle Elemente des Integrals positiv sind, so muss auch J positiv sein, und man erhält

$$J = 4\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = +2\pi;$$

und daher auch

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Ueber den Umstand, dass dies Integral einen endlichen Werth erhält, obgleich die Function $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ für $z = 1$ unendlich gross wird, vergleiche den folgenden §.

B. Integrale über nicht geschlossene Linien. Unbestimmte Integralfunctionen.

§ 44.

Wir behandeln in diesem Abschnitte die Frage, ob und unter welchen Bedingungen eine Integralfunction endlich bleibt, wenn die obere Grenze derselben entweder einen Werth erreicht, für den die Function unter dem Integralzeichen unendlich gross wird, oder selbst sich ins Unendliche entfernt. Wir untersuchen ferner, in welcher Weise die Integralfunction unendlich gross wird, wenn sie in diesen Fällen nicht endlich bleibt.

Sei

$$F(t) = \int_h^t \varphi(z)\, dz$$

die zu betrachtende Integralfunction, worin h eine beliebige Constante bedeute. Wir berücksichtigen bei derselben nur solche Integrationswege, welche der Function denselben Werth zuertheilen; die nächsten Abschnitte werden zeigen, dass die durch die verschiedenen Integrationswege hervorgebrachte Vieldeutigkeit einer Integralfunction den hier anzustellenden Betrachtungen keinen Eintrag thut.

Nimmt man zuerst an, $\varphi(z)$ werde in einem Puncte $z = a$, der kein Verzweigungspunct ist, unendlich gross von der $n$ten Ordnung, so kann man nach § 29 setzen

$$(34) \qquad \varphi(z) = \frac{c'}{z-a} + \frac{c''}{(z-a)^2} + \cdots\cdots + \frac{c^{(n)}}{(z-a)^n} + \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z = a$ endlich bleibt. Hieraus folgt

$$\int_h^t \varphi(z)\, dz = c' \int_h^t \frac{dz}{z-a} + c'' \int_h^t \frac{dz}{(z-a)^2} + \cdots\cdots + c^{(n)} \int_h^t \frac{dz}{(z-a)^n} + \int_h^t \psi(z)\, dz.$$

Darin ist das letzte Glied eine auch für $t = a$ endlich bleibende Function; bezeichnen wir dieselbe mit $\lambda(t)$, und denken wir in derselben die von der unteren Grenze h der übrigen Integrale herrührenden constanten Glieder mit einbegriffen, so erhalten wir

$$F(t) = c' \log(t-a) - \frac{c''}{t-a} - \frac{c'''}{2(t-a)^2} - \cdots - \frac{c^{(n)}}{(n-1)(t-a)^{n-1}} + \lambda(t).$$

Lässt man nun den Integrationsweg in dem Puncte $t = a$ endigen, so unterscheidet sich die Integralfunction von einer in $t = a$ endlich bleibenden Function $\lambda(t)$ um eine Grösse, welche das Glied $\log(t-a)$ enthält. Man sagt in diesem Falle, es werde $F(t)$ logarithmisch unendlich. Dieser Fall tritt ein, wenn in dem Ausdrucke (34) für $\varphi(z)$ das Glied $\frac{c'}{z-a}$ vorhanden ist. Fehlt dagegen dieses Glied, so fällt der Logarithmus fort, und $F(t)$ wird von einer ganzen Ordnung unendlich gross. Aber endlich bleibt $F(t)$ für $t = a$ nur dann, wenn

$$\lim\,(z-a)\varphi(z) = 0$$

ist, d. h. wenn $\varphi(z)$ selbst in $z = a$ endlich bleibt.

Nehmen wir daher jetzt an, der Unstetigkeitspunct a sei zugleich ein Verzweigungspunct. Hängen in demselben m Blätter der z-Fläche zusammen, so kann man nach § 38 setzen

$$\varphi(z) = \frac{g'}{(z-a)^{\frac{1}{m}}} + \frac{g''}{(z-a)^{\frac{2}{m}}} + \cdots + \frac{g^{(m)}}{z-a} + \frac{g^{(m+1)}}{(z-a)^{\frac{m+1}{m}}} + \cdots + \psi(z), \quad (35)$$

wo $\psi(z)$ für $z = a$ endlich bleibt. Man erhält hieraus

$$F(t) = g'\frac{m}{m-1}(t-a)^{\frac{m-1}{m}} + g''\frac{m}{m-2}(t-a)^{\frac{m-2}{m}} + \cdots + g^{(m-1)}m(t-a)^{\frac{1}{m}}$$
$$+ g^{(m)}\log(t-a) - \frac{g^{(m+1)}m}{(t-a)^{\frac{1}{m}}} - \cdots + \lambda(t),$$

wenn wie oben mit $\lambda(t)$ das letzte endlich bleibende Glied mit Hinzuziehung der von der unteren Grenze h herrührenden Constanten bezeichnet wird.

Wenn nun in diesem Ausdrucke höchstens die $m-1$ ersten Glieder vorhanden sind, so bleibt $F(t)$ für $t = a$ endlich. Dieser Fall tritt ein, wenn auch in (35) höchstens die $m-1$ ersten Glieder vorhanden sind. Dann ist $\varphi(z)$ höchstens von der Ordnung $\frac{m-1}{m}$ unendlich, und folglich

$$\lim\,(z-a)\varphi(z) = 0.$$

Demnach ist die Bedingung für das Endlichbleiben der Function $F(t)$ hier dieselbe wie vorhin, und wir erhalten den allgemeinen Satz:

1) Die Integralfunction

$$F(t) = \int_k^t \varphi(z)\,dz$$

hat für $t = a$ dann und nur dann einen endlichen Werth, wenn $\lim (z-a)\varphi(z) = 0$ ist. (Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass der Integrationsweg nicht durch einen anderen Unstetigkeitspunct oder Verzweigungspunct hindurch führe). Ferner ergiebt sich Folgendes:

2) Ist $\lim (z-a)\varphi(z)$ endlich, aber von Null verschieden, so ist $F(t)$ für $t = a$ logarithmisch unendlich.

3) Hat $\lim (z-a)^{\mu}\varphi(z)$ für einen ganzen oder gebrochenen Exponenten μ, der grösser als 1 ist, einen endlichen von Null verschiedenen Werth, so ist $F(t)$ von einer ganzen oder gebrochenen Ordnung, und wenn in der Entwickelung von $\varphi(z)$ das Glied von der Form $\frac{g}{z-a}$ vorhanden ist, zugleich logarithmisch unendlich.

§ 45.

Wir haben nun noch den Werth $t = \infty$ zu untersuchen. Durch die schon mehrmals angewendete Substitution

$$z = \frac{1}{u}$$

führen wir diesen Fall auf den vorigen zurück. Sei

$$\frac{1}{t} = \tau \quad , \quad F(t) = F_1(\tau) \quad , \quad \varphi(z) = \varphi_1(u),$$

so wird

$$F(t) = \int_k^t \varphi(z)dz = -\int_{\frac{1}{k}}^{\tau} \frac{\varphi_1(u)du}{u^2} = F_1(\tau).$$

Die Beschaffenheit von $F_1(\tau)$ richtet sich also nach der Beschaffenheit der Function $\frac{\varphi_1(u)}{u^2}$ für den Werth $u = 0$. Die Ergebnisse des vorigen § liefern dann Folgendes:

1) $F_1(\tau)$ ist endlich, wenn $\left[\lim \frac{u\varphi_1(u)}{u^2}\right]_{u=0} = \left[\lim \frac{\varphi_1(u)}{u}\right]_{u=0} = 0.$

2) $F_1(\tau)$ ist logarithmisch unendlich, wenn $\lim \frac{\varphi_1(u)}{u}$ endlich nnd nicht Null.

3) $F_1(\tau)$ ist von einer ganzen oder gebrochenen Ordnung (oder auch zugleich logarithmisch) unendlich, wenn für $\mu > 1$

$\lim \frac{u^\mu \varphi_1(u)}{u^2} = \lim \left(u^{\mu-2}\varphi_1(u)\right)$ endlich und nicht Null ist.

Nun ist

$$\frac{\varphi_1(u)}{u} = z\varphi(z) \quad ; \quad u^{\mu-2}\varphi_1(u) = \frac{\varphi(z)}{z^{\mu-2}},$$

also schliessen wir: für $t = \infty$ ist

1) $F(t)$ endlich, wenn $[\lim z\varphi(z)]_{z=\infty} = 0$,

2) $F(t)$ logarithmisch unendlich, wenn $\lim z\varphi(z)$ endlich und nicht Null;

3) $F(t)$ von einer ganzen oder gebrochenen Ordnung oder auch zugleich logarithmisch unendlich, wenn $\lim \frac{\varphi(z)}{z^{\mu-2}}$ endlich und nicht Null ist, (μ positiv und > 1).

Beispiele:

$\int_0^t \frac{dz}{1+z^2}$ wird für $t = +i$ oder $-i$ logarithmisch unendlich, bleibt aber endlich für $t = \infty$.

$\int_0^t \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ bleibt endlich für $t = +1$ oder -1 und wird logarithmisch unendlich für $t = \infty$.

$\int_0^t \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ bleibt endlich für $t = \pm 1$ und $t = \pm\frac{1}{k}$ und auch für $t = \infty$, ist also für jeden Werth von t endlich.

$\int_0^t \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\, dz$ bleibt endlich für $t = \pm 1$, und wird für $t = \infty$ von der ersten Ordnung unendlich.

$\int_0^t \frac{dz}{(1-a^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ bleibt endlich für $t = \pm 1$ und $t = \pm\frac{1}{k}$, ebenso für $t = \infty$, und wird für $t = \pm\frac{1}{a}$ logarithmisch unendlich.

Neunter Abschnitt.

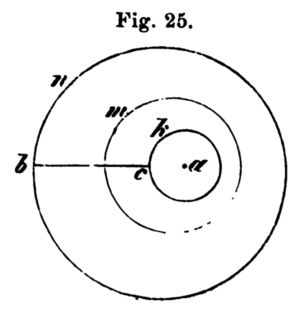
Einfach und mehrfach zusammenhängende Flächen.

§ 46.

Für die Untersuchung der Vieldeutigkeit einer Integralfunction $\int f(z)\,dz$ ist von besonderer Bedeutsamkeit die Beschaffenheit der z-Fläche für die unter dem Integralzeichen stehende Function $f(z)$ in Rücksicht auf ihren Zusammenhang. In dieser Beziehung ist schon in § 18 der grosse Unterschied hervorgetreten, welcher zwischen solchen Flächen stattfindet, in denen jede geschlossene Linie für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächentheiles bildet, und solchen, in denen nicht jede geschlossene Linie diese Eigenschaft besitzt. Wir müssen nun zuvörderst die Flächen in Beziehung auf diesen Unterschied etwas näher in's Auge fassen.

Man nennt nach *Riemann* die Flächen der ersteren Art einfach zusammenhängend, die der zweiten Art mehrfach zusammenhängend. Einfach zusammenhängend ist z. B. eine Kreisfläche, die Fläche einer Ellipse, überhaupt jede Fläche, welche nur aus einem Blatte besteht und von einer Linie begrenzt wird, die einfach in sich zurückläuft, ohne sich selbst zu schneiden. Mehrfach zusammenhängende Flächen können entstehen, wenn aus einfach zusammenhängenden Unstetigkeitspuncte durch kleine Kreise ausgeschlossen werden. Schliesst man z. B. aus einer Kreisfläche einen Unstetigkeitspunct a dadurch aus, dass man ihn mit einem kleinem Kreise k (Fig. 25) umgiebt, so entsteht eine Fläche, die nicht mehr einfach zusammenhängend ist; denn zieht man um k herum eine geschlossene Linie m, so bildet diese für sich allein nicht die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, sondern erst mit Zuziehung entweder des kleinen Kreises k, oder des äusseren Kreises n. Es können aber Flächen auch ohne alle Ausschliessung einzelner Puncte durch kleine Umhüllungen mehrfach zusammenhängend sein, wenn sie Verzweigungs-

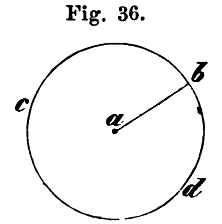
Fig. 25.



puncte besitzen und daher aus mehreren Blättern bestehen, die über die Verzweigungsschnitte hinüber in einander übergehn. Man gelangt dabei, selbst in verhältnissmässig einfachen Fällen, bald zu sehr complicirten Gestalten, bei welchen es nöthig ist, der Anschauung durch allgemeine Betrachtungen zu Hülfe zu kommen.

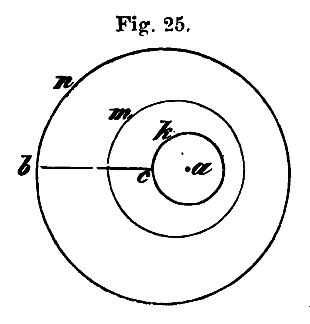
Wir nennen zwei Flächentheile überhaupt zusammenhängend, wenn man aus einem Puncte im Inneren des einen Theils auf einer ununterbrochenen Linie zu einem Puncte des anderen Theils gelangen kann, ohne eine Begrenzungslinie zu überschreiten; im entgegengesetzten Falle heissen die Flächentheile getrennt. Wenn nun ein Theil A einer zusammenhängenden Fläche durch eine oder mehrere Linien vollständig begrenzt ist, so wird er durch seine Begrenzung von dem übrigen Theil B der Fläche getrennt, und es ist nicht möglich, aus dem begrenzten Theile A in den anstossenden B zu gelangen, ohne die Begrenzung an irgend einer Stelle zu überschreiten; umgekehrt kann man, wenn dies nicht möglich ist, schliessen, dass der Theil A wirklich vollständig begrenzt ist. Unter den Linien, welche zur Begrenzung eines zusammenhängenden Flächentheils gehören, kann es solche geben, die zu gleicher Zeit zwei Begrenzungsstücke bilden. Hat man z. B. bei einer Kreisfläche längs eines Radius ab (Fig. 36) einen Schnitt geführt, so ist $abcdba$ die ganze Begrenzung der entstandenen Fläche; dann bildet die Linie ab, wenn man die Begrenzung in positiver Richtung (§ 17) durchläuft, einmal in der Richtung ab und dann noch einmal in der Richtung ba einen Theil der Begrenzung. Bei einer solchen Linie liegen die zu beiden Seiten an dieselbe anstossenden Flächentheile im Innern der begrenzten und zusammenhängenden Fläche. Sie hängen daher selbst zusammen, und man kann auf einer ganz im Inneren der Fläche verlaufenden Linie von der einen Seite jenes Begrenzungstheiles zur anderen gelangen. Von einer solchen Begrenzungslinie kann man sagen, dass sie keine äussere Seite, sondern zwei innere Seiten hat. Wenn nun eine geschlossene Linie eine solche Beschaffenheit hat, dass es möglich ist, von der einen Seite derselben, ohne sie zu überschreiten, auf die andere zu gelangen,

Fig. 36.



so kann man mit Sicherheit schliessen, dass sie für sich allein nicht die vollständige Begrenzung eines Flächentheils bildet, weil dann die auf beiden Seiten der Linie anstossenden Flächentheile zusammenhängen und nicht getrennt sind. Im entgegengesetzten Falle kann man freilich im Allgemeinen nicht schliessen, dass diese Linie für sich allein ein Flächenstück vollständig begrenzt, wie z. B. bei der Linie *m* in Fig. 25, weil jener Uebergang durch eine andere Begrenzungslinie verhindert werden kann. Wenn man es aber mit einer im Unendlichen geschlossenen Fläche zu thun hat, die überhaupt gar keine Begrenzung besitzt, und in einer solchen eine geschlossene Linie zieht, so kommt diese ganz allein in Betracht; und daher bildet in einer geschlossenen unbegrenzten Fläche jede geschlossene Linie nicht die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, oder sie bildet sie, je nachdem man von der einen Seite der Linie zur anderen gelangen kann oder nicht. Zunächst ein Paar Beispiele zur Verdeutlichung:

Fig. 25.



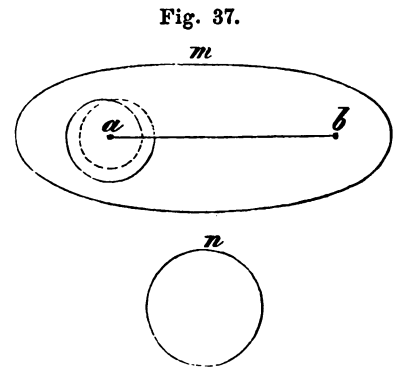
1) In Fig. 25 ist die von den Kreisen *n* und *k* begrenzte Fläche mehrfach zusammenhängend; die Linie *m* begrenzt für sich allein noch nicht einen Flächentheil. Man kann hier von *m* aus zu beiden Seiten nach *k* und *n* gelangen, daher hängen die zu beiden Seiten an *m* anstossenden Flächentheile resp. mit den an *k* und *n* anstossenden zusammen, und folglich bildet weder die an der einen Seite noch die an der anderen Seite von *m* anliegende Fläche einen getrennten Theil des Ganzen. Zusammengenommen aber bilden z. B. die Linien *m* und *k* eine vollständige Begrenzung, da es nicht möglich ist, ohne eine von beiden zu überschreiten, in einen anstossenden Flächentheil zu gelangen.

Dies Beispiel lehrt, dass eine innerhalb einer zusammenhängenden Fläche *F* verlaufende geschlossene Linie *m* in dem Falle nicht die vollständige Begrenzung eines Theiles der Fläche *F* bildet, wenn man von einem Puncte der Linie *m* aus zu beiden Seiten an die Begrenzung von *F* gelangen kann. Umgekehrt kann man schliessen: wenn wenigstens auf einer Seite der Linie *m* ein Uebergang zur Grenze nicht möglich ist, so bildet die an dieser Seite der Linie *m* anliegende Fläche einen getrenn-

ten Theil des Ganzen und wird daher von der Linie *m* vollständig begrenzt.

2) Eine aus zwei Blättern bestehende im Unendlichen geschlossene Fläche, die zwei Verzweigungspuncte *a* und *b* (Fig. 37) besitzt, welche durch einen Verzweigungsschnitt verbunden sind, ist eine einfach zusammenhängende Fläche. Um dies zu beweisen muss gezeigt werden, dass jede in ihr gezogene geschlossene Linie für sich allein ein Flächenstück begrenzt. Man kann nun nur dreierlei Arten von geschlossenen Linien ziehen: solche die keinen, solche die einen, und solche die zwei Verzweigungspuncte umgeben. Die erste und letzte Art sind nicht wesentlich von einander verschieden, denn je nachdem man eine solche Linie *m* oder *n* als Begrenzung des inneren oder äusseren Flächentheils ansieht, umgiebt sie entweder beide Verzweigungspuncte oder keinen. Eine solche Linie wie *m* oder *n* bildet aber stets eine vollständige Begrenzung, denn man kann auf keine Weise von der einen Seite zur anderen ohne Ueberschreitung der Linie selbst gelangen. Eine geschlossene Linie endlich, welche nur einen Verzweigungspunct, z. B. *a* umgiebt, geht zweimal um denselben herum, da sie beim Uberschreiten des Verzweigungsschnittes in das zweite Blatt tritt und daher, um in das erste zurück zu gelangen und sich zu schliessen, den Verzweigungsschnitt noch einmal überschreiten muss. Dann aber bildet sie ebenfalls eine vollständige Begrenzung, denn man kann nicht, ohne die Linie zu überschreiten von innen nach aussen gelangen. Führt man einen Schnitt längs der geschlossenen Linie durch beide Blätter, so fällt ein Stück heraus.

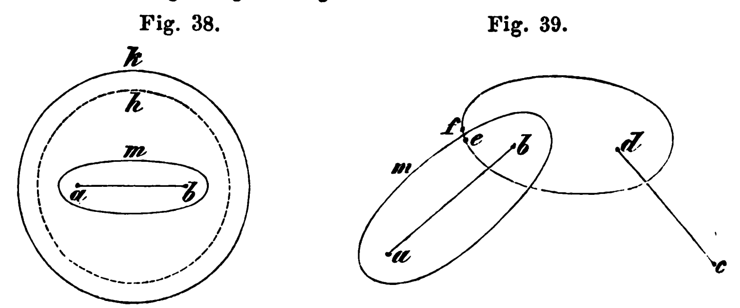
Fig. 37.



3) Die vorige Fläche wird zu einer mehrfach zusammenhängenden, sobald sie in jedem Blatte durch eine geschlossene Linie begrenzt wird (*h* und *k* Fig. 38; die punctirte Linie verläuft im zweiten Blatte); denn jetzt bildet eine um *a* und *b* im ersten

Blatte herumgehende Linie *m* erst mit Zuziehung von *k* oder *h* eine vollständige Begrenzung.

Fig. 38. Fig. 39.



4) Eine aus zwei Blättern bestehende Fläche, welche vier, paarweise durch Verzweigungsschnitte *ab*, *cd* verbundene Verzweigungspuncte besitzt, ist mehrfach zusammenhängend (Fig. 39). Denn zieht man eine Linie *m*, welche die Puncte *a* und *b* im ersten Blatte umgiebt, so kann man von der einen Seite derselben zur andern gelangen, ohne sie selbst zu überschreiten, nämlich auf folgende Weise. Sei *e* ein Punct der einen Seite von *m*; überschreitet man von *e* ausgehend den Verzweigungsschnitt *ab*, so gelangt man in das zweite Blatt und kann, ohne die Linie *m* zu treffen, da diese ganz im ersten Blatte verläuft, den zweiten Verzweigungsschnitt *cd* erreichen; überschreitet man ihn, so kommt man wieder in das erste Blatt zurück und gelangt auf die andere Seite der Linie *m* nach *f*. Die Linie *m* bildet also keine vollständige Begrenzung, da die zu beiden Seiten anstossenden Flächentheile zusammenhängen.*)

Eine im Unendlichen geschlossene Fläche hat, wie schon bemerkt, eigentlich gar keine Begrenzung. Will man eine solche Fläche begrenzen, so ist dazu schon ausreichend, wenn man nur einen unendlich kleinen Kreis, oder, was dasselbe ist, einen einzigen Punct aus ihr herausnimmt. Man denke sich etwa ein Blatt der Fläche an irgend einer Stelle mit einer Nadel durchstochen. Dieser Punct oder die Peripherie des unendlich kleinen Kreises bildet dann die Begrenzung der Fläche.

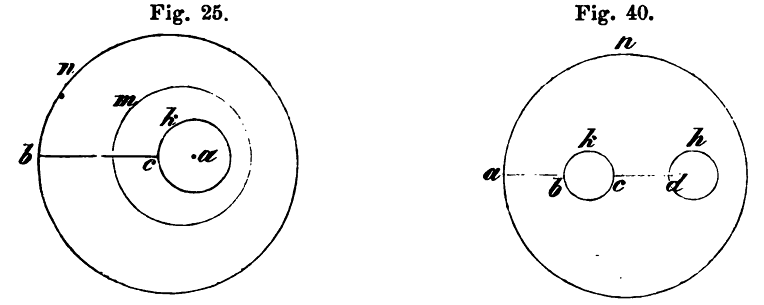
---

*) Wir werden später (Abschn. XII) allgemeine Beziehungen kennen lernen, aus denen man sofort den Zusammenhang einer gegebenen Fläche erkennen kann.

§ 47.

Jede mehrfach zusammenhängende Fläche kann durch gewisse Linien, welche *Riemann* Querschnitte nennt, in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden, und nach der Anzahl der hiezu nöthigen Querschnitte bestimmt sich dann der Grad der Vielfachheit des Zusammenhanges. Unter einem Querschnitt wird nun eine sich selbst nicht schneidende Linie verstanden, welche von einem Begrenzungspuncte durch das Innere der Fläche zu einem (anderen oder demselben) Begrenzungspuncte führt, und die Fläche nicht in zwei getrennte Stücke zertheilt.*) In einfachen Fällen zeigt die Anschauung unmittelbar die Möglichkeit, mehrfach zusammenhängende Flächen durch Querschnitte in einfach zusammenhängende zu verwandeln. Zieht man z. B. in der durch die Linien k und n begrenzten Fläche (Fig. 25) einen Querschnitt bc und rechnet beide Seiten desselben mit zur Begrenzung, indem man sich die Fläche längs bc wirklich durchgeschnitten denkt, so kann man keine geschlossene Linie mehr ziehen, welche k umgiebt, sondern jede geschlossene Linie bildet für sich allein eine vollständige Begrenzung. Dasselbe wird bei der durch die Linien h, k, n begrenzten

Fig. 25. Fig. 40.



Fläche (Fig. 40) durch zwei Querschnitte ab, cd geleistet. Jene Fläche heisst zweifach zusammenhängend, diese dreifach zu-

*) *Riemann* legt zwar den mit dem Namen Querschnitt bezeichneten Linien diese Beschränkung ursprünglich nicht auf; da aber fast ausschliesslich nur von solchen Querschnitten die Rede sein wird, welche eine Fläche nicht zerstücken, so scheint es die Kürze des Ausdrucks befördern zu können, wenn gleich von vorn herein nur solche Linien Querschnitte genannt werden, die eine Fläche nicht in getrennte Theile theilen.

sammenhängend. Im Allgemeinen heisst eine Fläche $(n + 1)$-**fach zusammenhängend**, wenn sie durch n Querschnitte in eine einfach zusammenhängende zerschnitten werden kann. Uebrigens kann schon in dem Beispiele Fig. 40 die Fläche auf mehrfache Weise durch Querschnitte *ab* und *cd* zerschnitten werden, z. B. auch so, wie Fig. 41 und 42 zeigen. Dabei ist zu bemer-



Fig. 41.

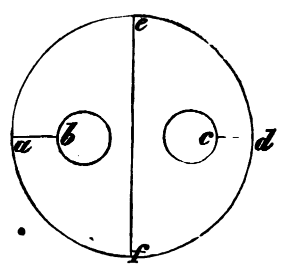
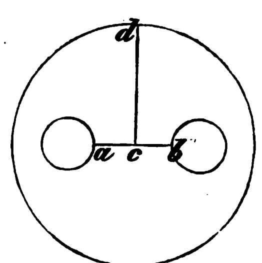


Fig. 42.



ken, dass, weil jeder schon geführte Querschnitt mit zur Begrenzung gehört, ein neuer auch von einem Puncte eines früheren ausgehen kann, wie z. B. *cd* in Fig. 42. Die Linie *ef* in Fig. 41 würde jedoch kein Querschnitt sein, da durch sie die Fläche in zwei getrennte Stücke zerfällt.

Bei einer im Unendlichen geschlossenen Fläche wird, wie oben bemerkt ist, die Begrenzung durch einen einzigen Punct gebildet. Bei einer solchen muss daher der erste Querschnitt von diesem Begrenzungspuncte ausgehen und in demselben endigen, also **eine geschlossene Linie** sein.

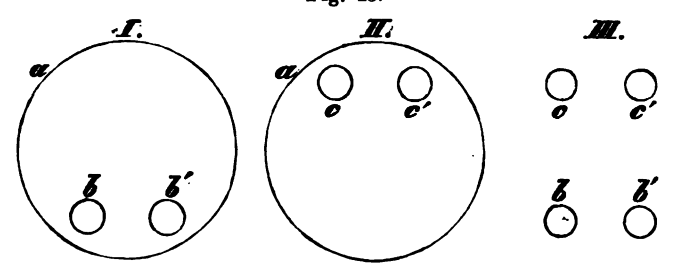
§ 48.

Um nun in complicirteren Fällen die Möglichkeit einzusehen, dass man eine mehrfach zusammenhängende Fläche immer durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandeln kann, und namentlich zu beweisen, dass dies bei einer gegebenen Fläche zwar auf sehr verschiedene Weise, immer aber durch die gleiche Anzahl von Querschnitten geschieht, haben wir folgende Betrachtungen nöthig.

Zunächst leuchtet Folgendes ein: Bilden zwei Systeme von Linien a und b zusammen die vollständige Begrenzung einer zusammenhängenden Fläche, ebenso auch zwei Systeme von Linien a und c, so haben auch die beiden Systeme b und c diese Ei-

genschaft. In Fig. 43 bilden z. B. bei I a, b, b' eine vollständige Begrenzung, ebenso bei II a, c c'; dann wird auch bei III

Fig. 43.

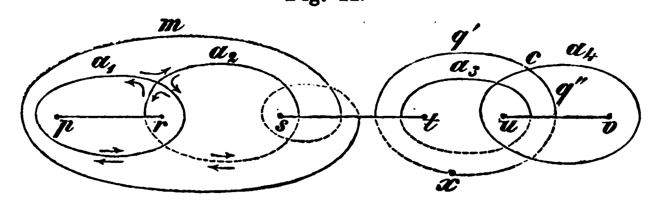


durch b, b', c, c' eine zusammenhängende Fläche begrenzt, nämlich die ausserhalb dieser vier Kreise liegende, ins Unendliche gehende Fläche. Man kann daher in Beziehung auf die Eigenschaft, eine zusammenhängende Fläche vollständig zu begrenzen, die Linien a durch die Linien b ersetzen.

Es ist nun zum Beweise des obigen Satzes bequemer, von einer anderen Definition einer $(n+1)$-fach zusammenhängenden Fläche auszugehen, welche nach *Riemann* folgendermassen lautet: Wenn in einer Fläche F sich n geschlossene Curven a_1, a_2, ... a_n ziehen lassen, welche weder für sich noch mit einander einen Theil dieser Fläche vollständig begrenzen, mit deren Zuziehung (und zwar mit allen oder auch nur mit einigen derselben) jede andere geschlossene Curve m die vollständige Begrenzung eines Theils der Fläche F bilden kann, so heisst die Fläche F eine $(n+1)$-fach zusammenhängende.

Um der Vorstellung zu Hülfe zu kommen, knüpfen wir an ein Beispiel an. Sei F eine im Unendlichen geschlossene aus 2 Blättern bestehende Fläche, welche 6 Verzweigungspuncte besitzt,

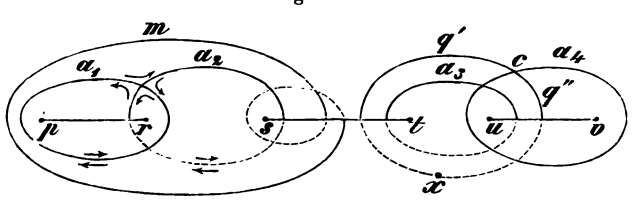
Fig. 44.



die paarweise durch die Verzweigungsschnitte pr, st, uv (Fig. 44) verbunden sind. Um diese Fläche zu begrenzen, nehmen wir

irgendwo einen Punct heraus, der dann als Begrenzung dient. Dieser Begrenzungspunct sei mit x bezeichnet und im zweiten Blatte liegend angenommen. Zieht man nun die vier geschlossenen Linien a_1, a_2, a_3, a_4, von denen keine durch den Be-

Fig. 44.



grenzungspunct x hindurchgeht (wobei die punctirten Linien im zweiten Blatte verlaufen), so reichen diese zur vollständigen Begrenzung eines Theils der Fläche noch nicht aus. Nämlich zuerst bildet keine von ihnen für sich allein eine vollständige Begrenzung, da man bei jeder von einer Seite zur andern gelangen kann (§ 46. 4). Nimmt man ferner a_1 und a_2 zusammen, so können zwar die beiden Seiten dieser Linien in einem ununterbrochenen Zuge durchlaufen werden, nämlich so, wie die Pfeile in Fig. 44 andeuten, und würden dann die Begrenzung der ganzen geschlossenen Fläche bilden, wenn diese ursprünglich unbegrenzt wäre; aber da noch der Begrenzungspunct x vorhanden ist, so wird erst mit diesem zusammen eine vollständige Begrenzung gebildet. Daher reichen auch a_1 und a_2 zusammen zu einer solchen nicht aus. Dasselbe gilt von a_3 und a_4 zusammen, und dann auch von allen vieren. Wir haben daher hier vier geschlossene Linien, die zur vollständigen Begrenzung noch nicht ausreichen. Mit ihrer Hülfe kann aber jede fünfte geschlossene Linie einen Theil vollständig begrenzen; z. B. die Linie m in Fig. 44 bildet mit a_1 zusammen eine vollständige Begrenzung, da man aus dem durch a_1 und m begrenzten Flächentheile auf keine Weise in den anstossenden Flächentheil gelangen kann. Ebenso würde eine die Puncte p, r, s, t umgebende, ganz im ersten Blatte verlaufende Linie mit a_4 zusammen einen Flächentheil vollständig begrenzen, und in ähnlicher Weise kann man sich leicht bei jeder geschlossenen Linie überzeugen, dass sie entweder für sich allein, oder mit einer oder mehreren der Linien a zusam-

men einen Flächentheil vollständig begrenzt. Die vorliegende Fläche ist daher 5-fach zusammenhängend.*)

Das System der Curven $a_1, a_2, \ldots . a_n$ kann durch irgend ein anderes System geschlossener Curven $b_1, b_2, \ldots b_n$, welche ebenfalls zur vollständigen Begrenzung nicht ausreichen, ersetzt werden. Denn da jede geschlossene Curve mit Zuziehung von $a_1, a_2, \ldots a_n$ (allen oder auch nur einigen) eine vollständige Begrenzung bildet, so wird eine solche ebensowohl durch

$$a_1 \text{ mit } a_2, a_3, \ldots a_n, m,$$

als auch durch

$$a_1 \text{ mit } a_2, a_3 \ldots a_n, b_1$$

gebildet. Folglich machen auch

$$b_1, a_2, a_3, \ldots a_n, m$$

eine vollständige Begrenzung aus. Nun kann aber für m jede geschlossene Curve, also auch b_2 genommen werden; demnach wird eine vollständige Begrenzung gebildet durch

$$a_2 \text{ mit } b_1, a_3, \ldots . a_n, m$$

und auch durch

$$a_2 \text{ mit } b_1, a_3, \ldots a_n, b_2;$$

also begrenzen auch

$$b_1, b_2, a_3, \ldots a_n, m$$

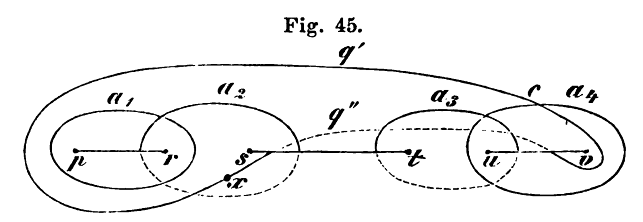
einen Theil vollständig. Fährt man so fort, so können nach und nach alle Curven a durch die Curven b ersetzt werden, und wenn auch diese letzteren zur vollständigen Begrenzung noch nicht ausreichen, so werden sie doch mit jeder geschlossenen Curve m eine vollständige Begrenzung bilden.

Jetzt kann zunächst bewiesen werden, dass eine $(n+1)$-fach zusammenhängende Fläche durch einen in bestimmter Weise gezogenen Querschnitt in eine n-fach zusammenhängende verwandelt wird. Wir knüpfen dabei an unser Beispiel (Fig. 44) an, indem der Beweis zwar allgemein gehalten, aber in allen Puncten auf das Beispiel Bezug genommen werden soll. Zieht man von einem beliebigen Puncte c der Linie a_n (im Beisp. a_4) nach beiden Seiten je eine Linie q' und q'' nach je einem Puncte der Begrenzung (im Beisp. nach x), und zwar so, dass q' und q''

*) Bei diesen und ähnlichen Betrachtungen können Modelle, in der Art angefertigt, wie es Seite 56 Note angegeben wurde, gute Dienste leisten.

keine der Linien a treffen, so bilden q' und q'' zusammen einen Querschnitt q. Hier muss zuerst gezeigt werden, dass es immer möglich ist, die Linien q' und q'' so zu ziehen. Allein da a_1, a_2, ... a_n zur vollständigen Begrenzung nicht ausreichen, so müssen die zu beiden Seiten an a_n anstossenden Flächentheile mit solchen Flächentheilen zusammenhängen, die an Begrenzungsstücke anstossen, und daher muss man von jedem Puncte der Linie a_n zu beiden Seiten, ohne eine der Linien a zu überschreiten, nach der Begrenzung gelangen können. (Fig. 45 zeigt bei

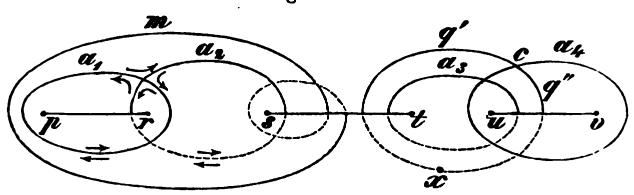
Fig. 45.



einer anderen Lage des Punctes x (und zwar im ersten Blatte) wie die Linien q' und q'' gezogen werden können.) Zweitens muss gezeigt werden, dass die Linie q die Fläche nicht zerstückt; dies aber geht daraus hervor, dass man auf der Linie a_n selbst von der einen Seite von q auf die andere kommen kann, sodass die zu beiden Seiten an q anstossenden Flächentheile zusammenhängen und keine getrennten Theile sind. Demnach kann die Linie q immer gezogen werden und ist wirklich ein Querschnitt. Dieser tritt nun zu den schon vorhandenen Begrenzungsstücken von F hinzu, und die so begrenzte Fläche möge mit F' bezeichnet werden. (Im Beisp. ist also F' von q allein begrenzt, da x ein Punct dieser Linie ist). Um nun zu beweisen, dass diese Fläche F' nur noch n-fach (im Beisp. 4-fach) zusammenhängend ist, muss gezeigt werden, dass man im Inneren derselben $n-1$ geschlossene Linien ziehen kann, die zur vollständigen Begrenzung noch nicht ausreichen, mit deren Zuziehung aber jede andere geschlossene Linie einen Theil von F' begrenzt. Ist m irgend eine geschlossene Linie, so begrenzt sie mit Zuziehung von allen oder einigen der Linien a_1, a_2, a_3, ... a_n einen Flächentheil. Wenn nun aber die Linie m (wie in Fig. 44) ganz im Innern von F' verläuft, also den Querschnitt q nicht schneidet, dann kann gezeigt werden, dass die Linie a_n, von deren Puncte c aus die Querschnittstheile q' und q'' gezogen sind, nicht zu dem

Complex der Linien a gehören kann, welche mit m zusammen einen Theil vollständig begrenzen. Sei f die von m und den Linien a begrenzte Fläche, welche also einen Theil von F' bildet, der durch seine Begrenzung von dem übrigen Theile getrennt ist (in Fig. 44 bilden a_1 und m die Begrenzung von f).

Fig. 44.

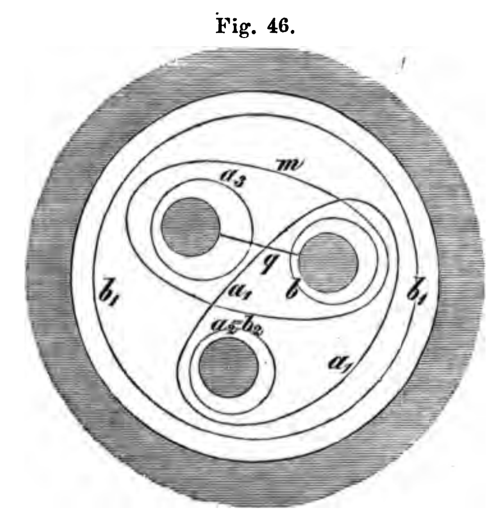


Gehörte a_n mit zur Begrenzung von f, so müsste f entweder links oder rechts von a_n liegen. Liegt aber f links von a_n, so führt q' von c, d. h. von einem Begrenzungspuncte von f nach einem Begrenzungspuncte von F'; da aber f einen getrennten Theil von F' bildet, so muss die Begrenzung von F' ausserhalb f liegen, und daher müsste q' die Begrenzung von f durchschneiden, was gegen die Voraussetzung ist, dass die Begrenzungsstücke von f, nämlich m und die Linien a, von q' nicht geschnitten werden. Daher kann f nicht links von a_n liegen. Ebenso wenig kann f rechts von a_n liegen, denn dann müsste q'' die Begrenzung von f durchschneiden, was ebenso gegen die Voraussetzung ist. Die Fläche f kann daher ausser von m höchstens von den Linien $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ begrenzt werden; demnach hat die Fläche F' die Eigenschaft, dass es in ihr $n-1$ geschlossene Linien giebt, die allein noch nicht, wohl aber mit jeder geschlossenen Linie m zusammen einen Flächentheil vollständig begrenzen, und folglich ist F' nur noch n-fach zusammenhängend.

Was hierdurch von einem bestimmten Querschnitte bewiesen ist, nämlich von einem solchen, der von einem auf einer der Linien a liegenden Puncte c zu beiden Seiten bis zur Begrenzung von F gezogen ist, ohne die Linien a zu durchschneiden, kann nun auch von jedem beliebigen Querschnitte bewiesen werden. Denken wir uns daher einen beliebigen Querschnitt q gezogen, und heisse die durch ihn entstehende Fläche wieder F'. (Vgl. hierzu das in Fig. 46 dargestellte Beispiel einer 4-fach zusammenhängenden Fläche, die nur aus einem Blatte besteht.)

Da ein Querschnitt q die Fläche F nicht in zwei getrennte Theile theilt, so hängen die beiden Seiten von q zusammen, und folglich kann man eine Linie b ziehen, welche von der einen Seite des q zur anderen führt. Diese Linie b bildet für sich keine vollständige Begrenzung, weil man von ihrem Durchschnittspuncte mit q zu beiden Seiten nach der Begrenzung von F kommen kann, nämlich längs der beiden Theile von q selbst (§ 46. 1). Nun bildet aber b als geschlossene Curve mit a_1, a_2, ... a_n (allen oder einigen) zusammen eine vollständige Begrenzung (in Fig. 46 bildet b mit a_1 und a_2 eine solche), ebenso auch m (im Beisp. mit a_1 und a_3); man kann also eine der Curven a, welche von q geschnitten wird, durch b ersetzen; ebenso kann man auch, falls die übrigen $n-1$ Curven a zum Theil oder alle von q geschnitten werden sollten, diese durch andere Curven b_1, b_2, ... b_{n-1} ersetzen, welche weder allein noch zusammen einen Flächentheil begrenzen, und q nicht schneiden, also ganz im Innern von F' verlaufen. Dadurch erhält man ganz den früheren Fall, wo eine Linie b den Querschnitt einmal schneidet, und die übrigen Linien b_1, b_2, ... b_{n-1} ihn nicht schneiden. Verläuft also die Linie m ganz in der Fläche F', d. h. schneidet sie den Querschnitt q nicht, so kann die Linie b nicht mit zu der Begrenzung der Fläche f gehören, die aus m und einem Complex der Linien b besteht (in Fig. 46 wird diese Begrenzung von m, b_1 und b_2 gebildet); es giebt also in F' nur $(n-1)$ geschlossene Curven, die mit jeder anderen einen Flächentheil vollständig begrenzen, und folglich ist F' nur n-fach zusammenhängend.

Fig. 46.



Hierdurch ist dargethan, dass eine $(n+1)$-fach zusammenhängende Fläche durch jeden beliebigen Querschnitt in eine n-fach zusammenhängende verwandelt wird. Ein zweiter Querschnitt

wird daher die n-fach zusammenhängende Fläche in eine $(n-1)$-fach zusammenhängende verwandeln u. s. w. f. Durch n aufeinanderfolgende Querschnitte, wobei jeder Querschnitt mit zur Begrenzung der durch ihn entstehenden Fläche gerechnet wird, geht also die $(n+1)$-fach zusammenhängende Fläche in eine einfach zusammenhängende über, und dabei kann jeder Querschnitt ganz beliebig gewählt werden.

Hieraus ergiebt sich also, dass wie verschieden auch die Querschnitte gelegt werden mögen, die Anzahl, welche zur Verwandlung in eine einfach zusammenhängende Fläche nöthig ist, nur von der Natur der Fläche abhängt und bei ein und derselben Fläche sich stets gleich bleibt. Demnach können wir nun auch wieder zu der § 47 gegebenen Definition zurückkehren und sagen: Eine Fläche ist $(n+1)$-fach zusammenhängend, wenn sie durch n Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden kann.

Aus dem Vorigen kann man noch folgende Schlüsse ziehen: Eine einfach zusammenhängende Fläche wird durch jede Linie p, welche von einem Begrenzungspuncte zu einem Begrenzungspuncte führt, in zwei getrennte Theile getheilt. Denn wäre dies nicht der Fall, hingen also die beiden Seiten der Linie p zusammen, so könnte man von der einen Seite derselben durch das Innere der Fläche eine Linie nach der anderen Seite ziehen. Dies wäre dann eine geschlossene Linie, welche für sich allein nicht einen Flächentheil begrenzt, da man von ihr längs der Linie p zu beiden Seiten nach der Begrenzung der Fläche kommen kann. Diese wäre also dann mindestens zweifach und nicht einfach zusammenhängend.

Ferner: Die Begrenzung einer einfach zusammenhängenden Fläche besteht immer aus einem einzigen zusammenhängenden Begrenzungsstücke. Denn bestände sie aus mehreren getrennten Stücken, so könnte man von einem Puncte des einen zu einem Puncte eines anderen Begrenzungsstückes durch das Innere der Fläche eine Linie p ziehen, welche die Fläche nicht in zwei getrennte Theile theilt, da man längs des einen der beiden Begrenzungsstücke von der einen Seite von p auf die andere Seite kommen könnte. Dieses aber ist nach dem vorigen Satze nicht möglich.

Wenn nun eine $(n+1)$-fach zusammenhängende Fläche durch

n Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt worden ist, so besteht jetzt die Begrenzung, zu welcher dann auch die Querschnitte gehören, aus einem einzigen zusammenhängenden Stücke, das in einem ununterbrochenen Zuge durchlaufen werden kann. Da nun aber die Querschnitte die Fläche nicht in getrennte Theile theilen, so hängen die an einen Querschnitt zu beiden Seiten anstossenden Flächentheile zusammen, und beide Seiten eines Querschnittes sind innere Seiten. Wird also die ganze Begrenzung der einfach zusammenhängenden Fläche in positiver Richtung durchlaufen, sodass das begrenzte Gebiet stets zur Linken der Begrenzung liegt, so muss jeder Querschnitt zwei Mal und zwar in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen werden.

Dies findet zuerst in den Fig. 40, 41 und 42 S. 157, 158 Bestätigung; ausserdem sind zur Erläuterung die Figuren 47 und 48 beigefügt worden, welche zugleich zeigen, wie bei einer im Unendlichen geschlossenen Fläche die Querschnitte zu legen sind. Die Fläche besteht in diesen Beispielen aus zwei Blättern und hat sechs Verzweigungspuncte; die im zweiten Blatte liegenden Linien sind punctirt. *Riemann* hat für einen solchen Fall zwei Arten der Zerschneidung angegeben, von denen die erste in Fig. 47,

Fig. 47.

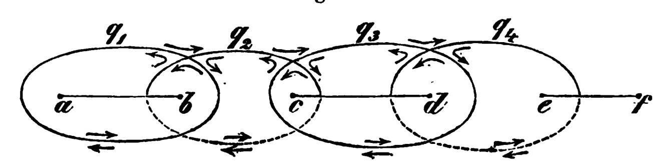
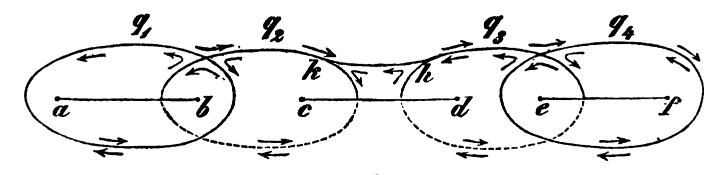


Fig. 48.



die zweite in Fig. 48 dargestellt ist. Bei beiden muss nach § 47 der erste Querschnitt q_1 eine geschlossene Linie sein, welche durch den beliebig anzunehmenden Begrenzungspunct hindurchgeht; ferner beginnt jeder folgende Querschnitt in einem Puncte des vorhergehenden, bei dem Querschnitte q_3 aber tritt der Unterschied ein. In Fig. 47 endigt auch dieser in seinem Anfangspuncte und

umgiebt die Verzweigungspuncte c und d; in Fig. 48 dagegen beginnt q_3 in k und endigt, indem er die Verzweigungspuncte d und e umgiebt, in einem andern seiner Puncte, in h. Dadurch wird dann auch der Querschnitt q_4 in Fig. 48 anders als in Fig. 47. Dieselben zwei Arten der Zerschneidung finden auch Anwendung, wenn noch mehr einfache Verzweigungspuncte vorhanden sind; bei der zweiten Art gehören dann immer je zwei Querschnitte paarweise zusammen. In unserem Beispiele ist die Fläche 5-fach zusammenhängend, und die Querschnitte bilden mit ihren beiden Seiten die vollständige Begrenzung einer einfach zusammenhängenden Fläche, die in einem ununterbrochenem Zuge durchlaufen werden kann, was durch die Pfeile angedeutet worden ist.

Zehnter Abschnitt,

Von den Periodicitätsmoduln.*)

---

§ 49.

Denken wir uns als das Gebiet der Veränderlichen z eine beliebige Fläche, aus so vielen Blättern bestehend und mit solchen Verzweigungspuncten, wie es die Natur einer zu betrachtenden Function $f(z)$ erheischt. Sind in derselben für die Function $f(z)$ Unstetigkeitspuncte vorhanden, so umgeben wir dieselben mit kleinen geschlossenen Linien und schliessen sie dadurch aus. Vorläufig wollen wir annehmen, dass dies mit allen Unstetigkeitspuncten geschehen sei, wir werden aber sehr bald sehen, dass gewisse Arten von Unstetigkeitspuncten nicht ausgeschlossen zu werden brauchen. Die so entstehende Fläche nennen wir die Fläche T. Ist nun diese mehrfach zusammenhängend, so ver-

*) Zur Erläuterung der in diesem Abschnitte enthaltenen allgemeinen Betrachtungen kann die in § 22 und 23 angestellte specielle Untersuchung des Logarithmus und der Exponentialfunction dienen. Weitere Beispiele finden sich in § 52.

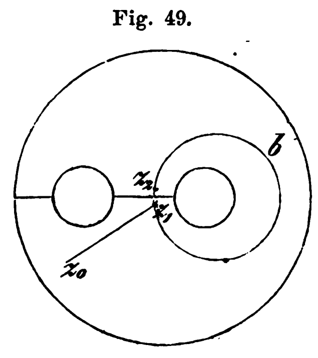
wandeln wir sie durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende, welche mit T' bezeichnet werden möge. Alsdann bildet innerhalb T' jede geschlossene Linie die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, in welchem $f(z)$ endlich und stetig ist. Bildet man daher die Integralfunction

$$w = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz,$$

indem man von einem beliebigen festen Anfangspuncte z_0 aus längs eines beliebigen, ganz innerhalb T' liegenden Weges bis zu einem Puncte z integrirt, so machen irgend zwei solche Wege vereinigt eine geschlossene Linie aus, die einen Flächentheil vollständig begrenzt, in welchem $f(z)$ überall stetig ist, und folglich erlangt w auf allen solchen Wegen in z denselben Werth (§ 18). Ausserdem ist, da $f(z)$ innerhalb T' überall endliche Werthe behält, auch w immer endlich, und daher ist w eine Function der oberen Grenze z, die innerhalb T' überall einwerthig, endlich und stetig bleibt.

Anders aber verhält es sich, wenn wir die Function w in der Fläche T betrachten, also den Integrationsweg auch die Querschnitte überschreiten lassen. Um dies zu untersuchen, wollen wir zuerst den Fall ins Auge fassen, dass kein Querschnitt durch einen späteren, von ihm ausgehenden, in Abschnitte getheilt wird. Nun gehört jeder Querschnitt mit zur Begrenzung von T', und zwar beide Seiten desselben, sodass diese zusammenhängen und man eine geschlossene, ganz im Innern von T' verlaufende Linie b ziehen kann, welche von der einen Seite des Querschnitts auf die andere Seite desselben führt. Sind dann z_1 und z_2 (Fig. 49) zwei zu beiden Seiten eines Querschnittes einander unendlich nahe liegende Puncte, so fragt es sich, ob

Fig. 49.



$$w = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz,$$

wenn man die Integrationswege immer noch ganz in T' verlaufen lässt, in z_1 und z_2 gleiche (eigentlich um eine unendlich kleine

Grösse verschiedene) oder verschiedene Werthe annimmt. Bezeichnet man aber die Werthe von w in z_1 und z_2 resp. durch w_1 und w_2, so ist

$$w_2 = \int_{z_0}^{z_2} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz,$$

das erste Integral auf einem beliebigen in T' verlaufenden Wege, das zweite auf einer geschlossenen Curve b genommen, die innerhalb T' von z_1 nach z_2 führt. Es ist also

$$w_2 - w_1 = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz.$$

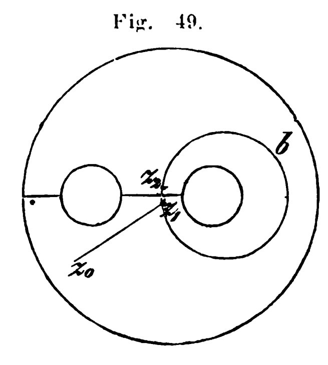
Daher haben w_1 und w_2 gleiche oder verschiedene Werthe, je nachdem das auf die geschlossene Linie b ausgedehnte Integral

$$\int f(z)\,dz$$

Null ist, oder einen von Null verschiedenen Werth A hat. Im ersteren Falle bleibt w beim Ueberschreiten des Querschnittes stetig, im letzteren Falle dagegen springt w plötzlich von w_1 zu $w_2 = w_1 + A$ über und ist daher unstetig. Allein dieser Sprung ist an allen Stellen des nämlichen Querschnittes der gleiche, da der Integralwerth sich nicht ändert, wenn man die geschlossene Linie b so erweitert oder verengert, dass sie an zwei anderen einander unendlich nahe liegenden Puncten z_1 und z_2 zu beiden Seiten des nämlichen Querschnittes anfängt und endigt (§ 19). Diese Grösse A, welche also längs des ganzen Querschnittes constant ist, und um welche die Functionswerthe auf der einen Seite des Querschnittes grösser sind, als auf der anderen, nennt man den Periodicitätsmodul, welcher diesem Querschnitt angehört. Ganz dasselbe findet nun bei jedem Querschnitte statt, da die beiden Seiten eines jeden zusammenhängen, und also eine geschlossene Linie von einem Puncte der einen Seite zu einem unendlich nahen auf der anderen Seite durch das Innere von T' gezogen werden kann. Jedem Querschnitt gehört also ein Periodicitätsmodul an, der für einen und denselben Querschnitt constant bleibt (immer noch unter der Voraussetzung, dass kein Querschnitt durch einen späteren in Abschnitte getheilt wird). Denkt man sich nun aber die Function w auch in T, also auch

über einen Querschnitt hinüber, **stetig** fortgesetzt, so erlangt sie auf dem den Querschnitt überschreitenden Wege $z_0 z_1 b z_2 z_1$ in z_1 einen Werth, der um den Periodicitätsmodul A grösser ist, als der Werth, den sie auf dem Wege $z_0 z_1$ erreicht, welcher den Querschnitt nicht überschreitet. Denn im ersteren Falle ist der Werth von w in z_1 als die stetige Fortsetzung von w_2 zu betrachten, während auf dem zweiten Wege w den Werth w_1 erlangt, und

Fig. 49.



$$w_2 = w_1 + A$$

war. Es findet hier ein ähnlicher Vorgang statt, wie der, den wir früher bei den Verzweigungsschnitten kennen gelernt haben (vgl. § 13), und so lange die Fläche T nur aus einem einzigen Blatte besteht, kann man auch wirklich jeden Querschnitt wie einen Verzweigungsschnitt ansehen, über den hinüber die Fläche sich in ein anderes Blatt fortsetzt, nur müsste man sich dann unendlich viele Blätter unter einander liegend denken, da bei jedem neuen Ueberschreiten des Querschnittes der Functionswerth w auf's Neue um A zunimmt, und der ursprüngliche Werth niemals wieder eintritt. Wenn aber die Fläche T selbst schon aus mehrerern Blättern besteht, dann hört jene Vorstellungsart auf, fassbar zu sein, und man kann nur die Analogie mit den Verzweigungsschnitten festhalten, wonach über einen Querschnitt hinüber ebensowohl eine Unterbrechung der Stetigkeit, wie eine stetige Fortsetzung der Function denkbar ist.

Das Zeichen von A ändert sich, wenn die geschlossene Curve b in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird; wir wollen aber den Periodicitätsmodul stets so annehmen, dass er gleich ist dem Integrale längs der geschlossenen Curve b, wenn diese in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen wird.

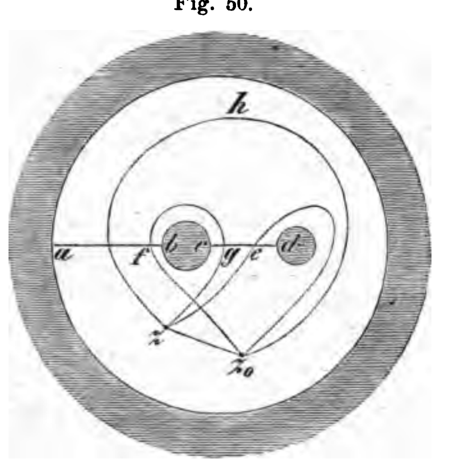
Denkt man sich jetzt alle möglichen Wege, welche von einem festen Ausgangspuncte z_0 nach einem beliebigen Puncte z innerhalb der Fläche T führen, so können diese Wege entweder keinen Querschnitt überschreiten, oder aber einen oder mehrere Querschnitte ein oder mehrere Male durchschneiden. Je nach der Beschaffenheit dieser Wege kann daher w in einem und dem-

selben Puncte z sehr verschiedene Werthe erhalten, und ist also eine vieldeutige Function der obern Grenze des Integrals. Allein da diese Verschiedenheit der Werthe von w in z nur durch die Ueberschreitungen der Querschnitte bewirkt wird, so können sich diese verschiedenen Werthe nur um Vielfache der Periodicitätsmoduln von einander unterscheiden. Bezeichnen daher A_1, A_2, A_3, etc. die Periodicitätsmoduln der einzelnen Querschnitte, n_1, n_2, n_3, etc. positive oder negative ganze Zahlen, und w und w' zwei verschiedene Werthe von w in z, so muss

$$w' = w + n_1 A_1 + n_2 A_2 + n_3 A_3 + \cdots\cdot$$

sein. Ein Beispiel möge dies erläutern. Fig. 50 stelle eine 3-fach zusammenhängende Fläche vor, die Querschnitte seien ab und cd, die Periodicitätsmoduln für dieselben resp. A_1 und A_2, so genommen, dass der Uebergang von der einen Seite des Querschnitts auf die andere längs einer geschlossenen Curve in der Richtung der wachsenden Winkel geschehe. Bezeichnet man dann den Werth, den die Function w auf einem Wege erlangt, dadurch, dass man den Weg dem Buchstaben w in Klammern hinzufügt, so ist

Fig. 50.



$$w(z_0 e z) = w(z_0 z) + A_2$$
$$w(z_0 f g z) = w(z_0 z) - A_1 + A_2$$
$$w(z_0 h z) = w(z_0 z) + A_1.$$

Es erhellt hieraus, dass die Integralfunction

$$w = \int_{z_0}^{z} f(z) dz$$

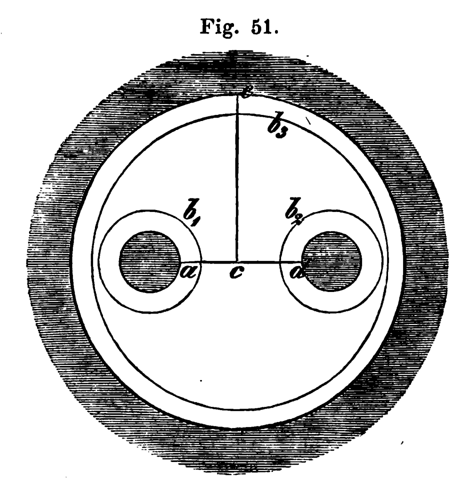
eine Vieldeutigkeit ganz besonderer Art besitzt, nämlich dass die verschiedenen Werthe, welche sie für denselben Werth von z annehmen kann, sich nur um Vielfache constanter Grössen von einander unterscheiden. Nimmt man nun die inverse Function,

d. h. betrachtet man z als Function von w, so ist diese eine periodische Function, da sie ungeändert bleibt, wenn man das Argument w um beliebige Vielfache der Periodicitätsmoduln vermehrt oder vermindert. Hierdurch rechtfertigt sich auch der Name Periodicitätsmodul, da man der Sprache der Zahlentheorie analog sagen kann, dass z für solche Werthe von w gleiche Werthe erhält, welche nach einem Periodicitätsmodul einander congruent sind, d. h. deren Differenz gleich einem Vielfachen des Periodicitätsmoduls ist.

§ 50.

Wir haben bisher angenommen, die Querschnitte seien so gezogen, dass keiner von ihnen durch einen späteren, von ihm ausgehenden, in Abschnitte getheilt wird. Wenn nun dies aber der Fall ist, z. B. so wie in Fig. 51, wo der eine Querschnitt *ad* durch den zweiten *ce* in die beiden Abschnitte *ac* und *cd* getheilt wird, so kann es vorkommen, dass der Periodicitätsmodul B_1 des einen Theils *ac* von dem B_2 des andern Theils *cd* verschieden ist. Denn B_1 ist gleich dem Integral $\int f(z)dz$ auf die Linie b_1 bezogen, B_2 gleich demselben Integrale auf b_2 ausgedehnt. Haben nun diese Integrale verschiedene Werthe, so sind auch die Periodicitätsmoduln B_1 und B_2 verschiedene. Dann bleibt also der Periodicitätsmodul nicht längs eines ganzen Querschnittes constant, sondern nur von einem Knoten des Schnittnetzes bis zum nächsten. Dem Querschnitte *ce* gehört nun auch ein Periodicitätsmodul B_3 an, wir haben daher drei Periodicitätsmoduln, trotzdem unsere Fläche nur zwei Querschnitte zur Verwandlung in eine einfach zusammenhängende nöthig hat. Allein in einem solchen Falle bestehen immer Beziehungen zwischen den einzelnen Periodicitätsmoduln. In unserem Beispiele ist das

Fig. 51.



Integral ausgedehnt auf b_3 gleich der Summe der Integrale ausgedehnt auf b_1 und b_2 (§ 19), und daher

$$B_3 = B_1 + B_2;$$

wir haben also in der That nur zwei von einander unabhängige Periodicitätsmoduln, d. h. eben so viele als Querschnitte vorhanden sind.

Um nun im Allgemeinen zu zeigen, dass es immer nur so viele von einander unabhängige Periodicitätsmoduln giebt, als Querschnitte, erinnern wir daran, dass die Querschnitte meist auf mehrfache Weise gezogen werden können. Immer aber giebt es eine Art der Zerschneidung, bei welcher jeder Periodicitätsmodul längs eines ganzen Querschnittes constant ist. Denn ist die Fläche eine begrenzte, so darf man nur jeden Querschnitt in einem Puncte der äusseren Begrenzung beginnen und in einem solchen enden lassen. Ist aber die Fläche unbegrenzt, sodass der erste Querschnitt eine geschlossene Linie sein muss (§ 47), so muss nun allerdings der zweite Querschnitt in einem Puncte des ersten anfangen, lässt man ihn aber auch in demselben Puncte endigen, also eine geschlossene Linie sein, und verfährt auf dieselbe Weise bei den übrigen Querschnitten, so haben auch hier die Abschnitte gleiche Periodicitätsmoduln. Das am Ende des § 48 angeführte Beispiel zeigt in Fig. 47 eine solche Zerschneidungsart; in Fig. 48 besteht dagegen der Querschnitt q_3 aus zwei Abschnitten, (nämlich aus der Linie kh und der um die Puncte d und e herumgehenden geschlossenen Linie) welche verschiedene Periodicitätsmoduln haben.

Sei nun eine $(n+1)$-fach zusammenhängende Fläche zuerst so durch n Querschnitte in eine einfach zusammenhängende zerschnitten worden, dass dabei kein Querschnitt durch einen andern in Theile mit verschiedenen Periodicitätsmoduln zerlegt werde; dann haben wir bei dieser Zerschneidungsart gerade so viel Periodicitätsmoduln als Querschnitte. Diese seien

$$A_1, A_2, \cdots A_n.$$

Zweitens sei dieselbe Fläche auf eine andere beliebige Art zerschnitten worden. Zerfallen dabei einzelne Querschnitte in mehrere Theile, so ist die Anzahl der Periodicitätsmoduln grösser als n; seien dieselben

$$B_1, B_2, \cdots B_m \ ; \ m > n.$$

Lässt man nun die Variable z von einem beliebigen Puncte z_0

aus eine geschlossene Linie beschreiben, welche nur einen Querschnitt des ersten Systemes überschreitet, für welchen A_k der Periodicitätsmodul sei, und bezeichnen w_0 und w die Werthe, welche die Function beim Beginn und nach Vollendung der geschlossenen Linie hat, so ist

$$w = w_0 + A_k.$$

Denkt man nun aber die Fläche auf die zweite Art zerschnitten, so kann dieselbe geschlossene Linie mehrere Querschnitte des zweiten Systemes überschreiten; der Werth von w wird daher nach § 49 auch in der Form

$$w = w_0 + h_1 B_1 + h_2 B_2 + \cdots + h_m B_m$$

enthalten sein müssen, wo die h positive oder negative ganze Zahlen (Null eingeschlossen) bedeuten. Demnach ist

$$A_k = h_1 B_1 + h_2 B_2 + \cdots + h_m B_m.$$

Lässt man umgekehrt die Variable z von z_0 aus eine geschlossene Linie durchlaufen, welche nur einen Querschnitt des zweiten Systemes überschreitet, für welchen der Periodicitätsmodul B_λ sei, so ist der Endwerth der Function einmal

$$w_0 + B_\lambda,$$

wird aber, wenn man auf die Ueberschreitungen der Querschnitte des ersten Systemes Rücksicht nimmt, auch in der Form

$$w_0 + g_1 A_1 + g_2 A_2 + \cdots + g_n A_n$$

enthalten sein, worin die g ebenfalls positive oder negative ganze Zahlen (oder Null) bedeuten. Hieraus folgt

$$B_\lambda = g_1 A_1 + g_2 A_2 + \cdots + g_n A_n.$$

Wir erhalten demnach zwischen den beiden Systemen der Periodicitätsmoduln A und B folgende zwei Systeme von Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = h_1' B_1 + h_2' B_2 + \cdots + h'_m B_m \\ A_2 = h_1'' B_1 + h_2'' B_2 + \cdots + h''_m B_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n = h_1^{(n)} B_1 + h_2^{(n)} B_2 + \cdots + h_m^{(n)} B_m \end{array}\right\} \text{I.}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = g_1' A_1 + g_2' A_2 + \cdots + g'_n A_n \\ B_2 = g_1'' A_1 + g_2'' A_2 + \cdots + g''_n A_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_m = g_1^{(m)} A_1 + g_2^{(m)} A_2 + \cdots + g_n^{(m)} A_n. \end{array}\right\} \text{II.}$$

Da nun der Annahme nach $m > n$ ist, so kann man aus II die die n Grössen A eliminiren und erhält dadurch $m - n$ Beziehungen zwischen den Grössen B. Da man aber diese Beziehungen

auch dadurch erhalten kann, dass man die Werthe der A aus I in II substituirt, so müssen sie homogene lineare Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten sein. Demnach ergiebt sich: wenn frühere Querschnitte durch spätere in Theile zerlegt werden, für welche die Periodicitätsmoduln verschiedene Werthe haben, sodass im Ganzen m Periodicitätsmoduln existiren, während nur n Querschnitte vorhanden sind, so bestehen zwischen diesen m Periodicitätsmoduln $m-n$ lineare homogene Bedingungsgleichungen mit ganzzahligen Coefficienten, und nur n von ihnen, d. h. ebenso viele als Querschnitte existiren, sind von einander unabhängig.

§ 51.

Wir haben bisher angenommen, dass aus der z-Fläche sämmtliche Unstetigkeitspuncte durch kleine Umhüllungen ausgeschieden seien, so dass die Function $f(z)$ in der entstehenden Fläche T endlich blieb. Nun wollen wir aber zeigen, dass es in der That nicht nothwendig ist, alle auszuschliessen, und untersuchen, bei welchen dies nicht zu geschehen braucht.

Der Periodicitätsmodul A für irgend einen Querschnitt ist, wie § 49 gezeigt wurde, der Werth des Integrales $\int f(z)dz$ ausgedehnt über eine geschlossene Linie b, welche von der einen Seite des Querschnittes durch das Innere der einfach zusammenhängenden Fläche T' auf die andere Seite desselben Querschnittes führt. Nun kann aber dieses Integral in vielen Fällen den Werth Null haben. Denken wir uns, dass die Linie b eine aus der z-Fläche ausgeschiedene Stelle umgiebt, die einen Unstetigkeitspunct a, (der nicht zugleich Verzweigungspunct ist) der Function $f(z)$ enthielt. Alsdann hat das Integral $\int f(z)dz$ nach § 42 nur dann einen von Null verschiedenen Werth, wenn in dem Ausdrucke, welcher angiebt, wie $f(z)$ unstetig wird, das Glied

$$\frac{c'}{z-a}$$

vorhanden ist; in allen übrigen Fällen wird das Integral gleich Null. Letzteres findet also z. B. statt, wenn $f(z)$ in a unendlich wird wie

$$\frac{c''}{(z-a)^2}$$

oder wie

aus eine geschlossene Linie beschreiben, we' schnitt des ersten Systemes überschreite' ...., Periodicitätsmodul sei, und bezeichne' ganze Zahl bedeutet. In welche die Function beim Beginn die Function w beim Ueber-schlossenen Linie hat, so ist daher ist es nicht nothwendig,

$w =$ ssen, und der Querschnitt braucht

Denkt man nun aber die Fl' Denkt man sich z. B. ein einfach so kann dieselbe geschl' der z-Fläche, in welchem nur Un-zweiten Systemes übe' Rede stehenden Art enthalten sind, so nach § 49 auch in $f(z)\,dz$ auch auf zwei Wegen, die einen

$w =$. punct einschliessen, denselben Werth, weil

enthalten sein keitspunct herum genommen, den Werth Null Zahlen (Nul' innerhalb eines solchen Flächenstücks ist daher die

Lässt Lin' S·

$$w = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

ebenfalls eine einwerthige Function der oberen Grenze, wie wenn das Flächenstück gar keine Unstetigkeitspuncte enthielte; nur wird w in den Unstetigkeitspuncten selbst unendlich gross.

Dies ist die eine Art der Unstetigkeitspuncte, die nicht ausgeschlossen zu werden brauchen; bei diesen wird auch stets das Ziehen des Querschnitts erspart. Gehen wir zu Verzweigungspuncten über, so erhält das Integral $\int f(z)\,dz$ längs der geschlossenen Linie b den Werth Null, wenn diese einen Windungspunct $(m-1)$ter Ordnung umgiebt, in welchem $f(z)$ von keiner höheren Ordnung unendlich wird, als von der Ordnung $\frac{m-1}{m}$ (§ 21), und überhaupt, wenn in dem Ausdruck, welcher angiebt, wie $f(z)$ in dem Verzweigungspuncte unendlich wird, das Glied, das von der ersten Ordnung unendlich ist, fehlt (§ 42). In diesem Falle braucht also der Unstetigkeits- und Verzweigungspunct ebenfalls nicht ausgeschlossen zu werden. Aber da jetzt die z-Fläche aus mehreren Blättern besteht, so kann sie auch ohne irgend welche Ausschliessungen mehrfach zusammenhängend sein. Daher kann jetzt der Fall vorkommen, dass kein Querschnitt überflüssig gemacht wird; soll aber dann der Periodicitätsmodul einen von Null verschiedenen Werth haben, so muss die geschlossene Linie b mindestens zwei Verzweigungspuncte umgeben,

immer eine Linie sein muss, die für sich allein noch nicht
lächentheil vollständig begrenzt.

ch können wir auch entscheiden, wann der unendlich
unct ausgeschlossen werden muss. Der Werth des
z) dz für eine den Punct $z = \infty$ umgebende Linie
43) nach der Beschaffenheit, welche die Function

$$z^2 f(z)$$

$= \infty$ hat. Dieser Punct muss also ausgeschlossen werden,
nn

$$\lim\,[z f(z)]_{z=\infty} \text{ endlich und von Null verschieden}$$

ist, und überhaupt dann und nur dann, wenn in der Entwickelung von $f(z)$ nach steigenden und fallenden Potenzen von z ein Glied von der Form

$$\frac{g}{z}$$

vorhanden ist.

Wenn nun für eine gegebene Function $f(z)$ aus der z-Fläche alle diejenigen Puncte ausgeschlossen worden sind, die nothwendig ausgeschlossen werden müssen, und nur diese, so ist innerhalb der so entstandenen Fläche T das Integral $\int f(z)\,dz$, bezogen auf eine geschlossene Linie, welche für sich allein einen Flächentheil vollständig begrenzt, stets gleich Null. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass die geschlossene Linie nicht durch einen Unstetigkeitspunct oder Verzweigungspunct hindurch führt.

§ 52.

Es sollen nun zur Erläuterung der vorstehenden Betrachtungen einige Beispiele vorgeführt werden.

1. Der Logarithmus.

Wir erinnern zuerst an die schon § 22 und 23 behandelte Function log z, oder an die Integralfunction

$$w = \int_1^z \frac{dz}{z}.$$

Hier ist $f(z) = \frac{1}{z}$ einwerthig, die z-Fläche besteht daher aus einem Blatte. Ferner ist $z = 0$ ein Unstetigkeitspunct, und in ihm ist

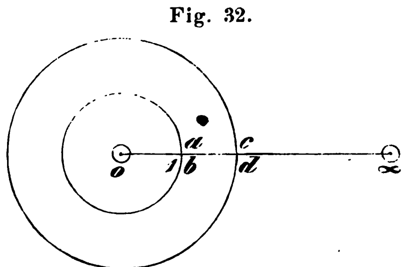
$$\lim z\,f(z) = \lim z \cdot \frac{1}{z} = 1.$$

Dieser Punct muss daher ausgeschlossen werden. Nimmt man die z-Fläche im Unendlichen geschlossen an, so muss auch der Punct $z = \infty$ ausgeschlossen werden, weil auch

$$[\lim z\,f(z)]_{z=\infty} = 1$$

ist. Durch Ausschliessung dieser beiden Puncte wird die Fläche T zweifach zusammenhängend, und ein Querschnitt, welcher die beiden die Puncte 0 und ∞ umgebenden Kreise verbindet, verwandelt sie in eine einfach zusammenhängende Fläche (Fig. 32). Der Periodicitätsmodul A ist gleich dem Integral

Fig. 32.



$$\int \frac{dz}{z},$$

ausgedehnt auf eine den Nullpunct in der Richtung der wachsenden Winkel umgebende geschlossene Linie, er ist also

$$A = 2\,\pi i.$$

Eine solche Linie umgiebt zugleich auch den Punct ∞, und für diese erhält man (§ 43)

$$\int \frac{dz}{z} = -2\pi i \left[\lim \frac{z^2 \frac{1}{z}}{z}\right]_{z=\infty} = -2\pi i,$$

wenn die Integration in der positiven Begrenzungsrichtung ausgeführt, also der Querschnitt in der entgegengesetzten Richtung überschritten wird, wie vorhin.

2. Der Arcus Tangens.

$$w = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}.$$

Hier ist

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

ebenfalls einwerthig und wird von der ersten Ordnung unendlich für $z = i$ und $z = -i$, dagegen ist für $z = \infty$

$$\lim z\,f(z) = \lim \frac{z}{1+z^2} = \lim \frac{1}{z+\frac{1}{z}} = 0.$$

Man braucht daher nur die Puncte $z = i$ und $z = -i$ durch kleine Kreise auszuschliessen und erhält dann, wenn die z-Fläche im Unendlichen geschlossen angenommen wird, eine zweifach zusammenhängende Fläche, welche sich durch einen die kleinen Kreise um $+i$ und $-i$ verbindenden Querschnitt in eine einfach zusammenhängende verwandelt. Der Periodicitätsmodul A ist das Integral

Fig. 52.

$$\int dw$$

ausgedehnt auf eine den Punct $+i$ in der Richtung der wachsenden Winkel umgebende geschlossene Linie, und daher, wie schon § 20 ermittelt wurde,

$$A = \pi.$$

Dieselbe Linie kann auch angesehen werden als eine, welche den Punct $-i$ in der Richtung der abnehmenden Winkel umgiebt, und liefert dann denselben Periodicitätsmodul.

Nimmt man die z-Fläche nicht im Unendlichen geschlossen an, sondern begrenzt sie durch eine geschlossene Linie, die man dann ins Unendliche sich ausdehnen lässt, so wird die Fläche T durch Ausschliessung der beiden Puncte $+i$ und $-i$ zu einer dreifach zusammenhängenden. Man muss also dann zwei Querschnitte anwenden, um sie in eine einfach zusammenhängende zu verwandeln. Da nun aber das Integral

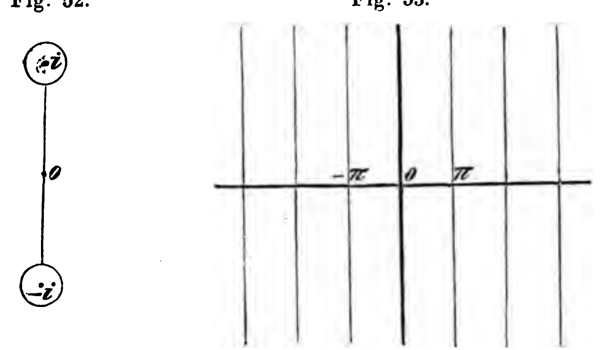
$$\int^{i} \frac{dz}{1+z^2}$$

ausgedehnt auf eine geschlossene Linie entweder den Werth $+\pi$ oder $-\pi$ oder Null hat, je nachdem die Linie den Punct $+i$ oder $-i$ oder beide in der Richtung der wachsenden Winkel umgiebt (§ 20), so haben die auf die beiden Querschnitte bezogenen Periodicitätsmoduln, je nach der Art, wie sie gezogen werden, entweder die Werthe $+\pi$ und $-\pi$, oder der eine hat den Werth $\pm\pi$ und der andere den Werth Null. Die Function $w = arc\ tg\ z$ ändert sich daher hier auch nur um Vielfache von π.

Die inverse Function $z = tg\ w$ ist nun um die Grösse π periodisch. Die Abbildung der im Unendlichen geschlossen angenommenen z-Fläche auf der Fläche der w geschieht hier in ganz ähnlicher Weise, wie es § 23 bei der Exponentialfunction gezeigt worden ist; an die Stelle der die Puncte 0 und ∞ ein-

schliessenden Kreise treten hier nur diejenigen, welche die Puncte $+i$ und $-i$ umgeben. Nimmt man den Querschnitt, welcher

Fig. 52. Fig. 53.



diese Kreise verbindet, längs der Ordinatenaxe verlaufend an, so wird die w-Fläche in Streifen getheilt, welche von Geraden begrenzt werden, die mit der Ordinatenaxe parallel laufen und durch die Puncte 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, etc. hindurchgehen. In jedem dieser Streifen nimmt die Function $z = tg\ w$ ihre sämmtlichen Werthe an, und zwar jeden nur einmal, weil abgesehen von den Periodicitätsmoduln jedem Werthe von z nur ein Werth von w entspricht, da die z-Fläche nur aus einem Blatte besteht.

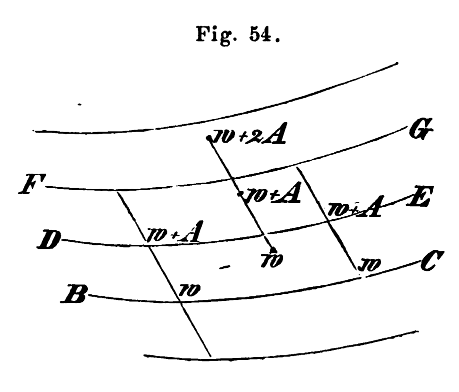
Wir wollen nun diese Function auch in umgekehrter Weise betrachten, indem wir von der periodischen Function ausgehn. Bedeutet $z = \varphi(w)$ eine einwerthige einfach periodische Function mit dem Periodicitätsmodul A, d. h. eine einwerthige Function, welche die Eigenschaft besitzt, dass

$$\varphi(w + A) = \varphi(w)$$

ist, so lässt sich die Ebene der w so in Streifen theilen, dass die Function in jedem Streifen ihre sämmtlichen Werthe annimmt, und in je zwei in verschiedenen Streifen liegenden Puncten, deren Differenz gleich A oder gleich einem Vielfachen von A ist, gleiche Werthe hat (Fig. 54). Zieht man nämlich eine beliebige sich selbst nicht schneidende Linie BC, so bilden die Puncte $w + A$, welche durch Addition von A aus den Puncten der Linie BC entstehen, eine dieser parallele Linie DE. Die Function φ hat also auf DE dieselben Werthe, wie auf BC. Dasselbe findet auf allen Linien statt, die mit den vorigen in gleichen Entfernungen parallel laufen. Ist ferner w ein Punct im Inneren

des Streifens $BCDE$, so liegt $w + A$ im Inneren des anstossenden Streifens $DEFG$, $w + 2A$ im Inneren des nächstfolgenden Streifens u. s. f. In diesen Puncten hat daher die Function wiederum gleiche Werthe. Da nun also je zwei Puncte w und $w + nA$, in denen die Function gleiche Werthe hat, in verschiedenen Streifen liegen, so muss sie in jedem Streifen ihre sämmtlichen Werthe erhalten.

Fig. 54.



Wir wollen nun weiter annehmen, die Function $z = \varphi(w)$ erhalte in einem und demselben Streifen jeden Werth nur einmal und werde nur in einem endlichen Puncte $w = r$ dieses Streifens unendlich gross von der ersten Ordnung. Dann wird sie natürlich auch in den entsprechenden Puncten $w = r \pm nA$ der übrigen Streifen unendlich gross von der ersten Ordnung. Nun kann man nach § 29 setzen

$$z = \varphi(w) = \frac{c}{w - r} + \psi(w), \tag{36}$$

wo c eine gegebene Constante, und $\psi(w)$ eine Function bedeutet, die in dem zu betrachtenden Streifen nicht mehr unendlich gross ist, sondern nur noch in den übrigen Streifen. Daraus folgt

$$\frac{dz}{dw} = \varphi'(w) = -\frac{c}{(w-r)^2} + \psi'(w). \tag{37}$$

Da nun $\psi'(w)$ in dem Streifen ebenfalls endlich bleibt, so wird $\frac{dz}{dw}$ auch nur für $w = r$ unendlich gross, also nur da, wo z unendlich wird, und dies muss in gleicher Weise von allen Streifen gelten. Während aber z von der ersten Ordnung unendlich gross ist, ist $\frac{dz}{dw}$ von der zweiten Ordnung unendlich gross. Betrachtet man also $\frac{dz}{dw}$ als eine Function von z, so ist sie nur für $z = \infty$ und zwar von der zweiten Ordnung unendlich gross. Da ferner z in einem und demselben Streifen jeden Werth nur einmal annimmt, so entspricht in einem und demselben Streifen jedem Werth von z nur ein Werth von w. Demnach ist w eine

Function von z, welche zwar für jeden Werth von z unendlich viele Werthe hat, die sich aber nur um Vielfache des Periodicitätsmoduls, also um constante Grössen, von einander unterscheiden. Folglich ist $\frac{dw}{dz}$ eine einwerthige Function von z, da die Constanten bei der Differentiation verschwinden. Die reciproke Function $\frac{dz}{dw}$ muss daher ebenfalls eine einwerthige Function von z sein. Verbindet man dieses mit dem Vorhergehenden, so ergiebt sich, dass $\frac{dz}{dw}$ eine einwerthige Function von z ist, welche nur für $z = \infty$ und hier von der zweiten Ordnung unendlich gross ist. Folglich ist (nach § 31) $\frac{dz}{dw}$ eine ganze Function zweiten Grades von z. Eine solche muss nach § 36 auch zwei Mal den Werth Null annehmen. Bezeichnet man mit a und b die Werthe von z, für welche dieses geschieht, und mit C eine Constante, so ist

(38) $$\frac{dz}{dw} = C\,(z-a)\,(z-b)$$

und daher

$$w = \int \frac{dz}{C\,(z-a)\,(z-b)}.$$

Demnach ist eine einfach periodische Function, welche in jedem Streifen alle Werthe einmal annimmt und nur für einen endlichen Punct in demselben unendlich gross von der ersten Ordnung wird, die inverse Function des vorstehenden algebraischen Integrals.

In diesem können die Werthe a und b nicht einander gleich sein, denn in diesem Falle würde die Function

$$w = \int \frac{dz}{C\,(z-a)^2}$$

nach § 51 eine einwerthige Function der oberen Grenze sein, und dann könnte z nicht eine periodische Function sein. Die Constante C lässt sich durch c ausdrücken; denn aus (38) folgt

$$C = \left[\lim \frac{\frac{dz}{dw}}{z^2}\right]_{z=\infty}$$

und mit Benutzung der Gleichungen (36) und (37)

$$C = \left[\lim \frac{-\frac{c}{(w-r)^2} + \psi'(w)}{\left(\frac{c}{w-r} + \psi(w)\right)^2}\right]_{w=r}$$

oder

$$C = \lim \frac{-c + (w-r)^2 \psi'(w)}{(c + (w-r)\psi(w))^2} = -\frac{1}{c}.$$

Hiermit wird

$$w = \int \frac{-c\,dz}{(z-a)(z-b)}.$$

Der Periodicitätsmodul A ist gleich dem Werthe dieses Integrals, wenn es längs einer geschlossenen Linie genommen wird, die entweder den Punct a oder den Punct b umgiebt. Integrirt man um a in der Richtung der wachsenden Winkel, so folgt

$$A = 2\pi i \left[\lim \frac{-c(z-a)}{(z-a)(z-b)}\right]_{z=a} = \frac{2\pi i c}{b-a},$$

bei der Integration um b würde man den entgegengesetzten Werth erhalten. Giebt man dem Integral die untere Grenze h, d. h., erhält z in dem Puncte $w=0$ den Werth h, so ist, da $z=\infty$ wird für $w=r$,

$$r = \int_h^\infty \frac{-c\,dz}{(z-a)(z-b)}.$$

3. Der Arcus Sinus.

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Hier besteht die z-Fläche für die Function

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

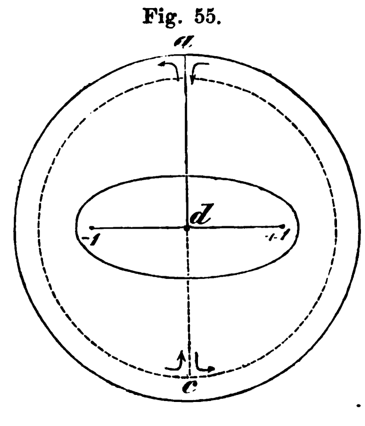
aus zwei Blättern. Wir haben die zwei Verzweigungspuncte $z = +1$ und $z = -1$, welche zugleich Unstetigkeitspuncte sind. Da in ihnen aber $f(z)$ nur von der Ordnung $\frac{1}{2}$ unendlich wird, so brauchen diese Puncte nicht ausgeschlossen zu werden, dagegen muss dies mit $z = \infty$ geschehn, weil

$$\left[\lim \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right] = \lim \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$$

also endlich ist, und zwar muss in jedem Blatte der Punct ∞ ausgeschlossen werden, da er kein Verzweigungspunct ist. Aus diesem Grunde ist es bei diesem Beispiele für den Zusammenhang der Fläche gleichgültig, ob man die beiden Blätter der z-Fläche im Unendlichen geschlossen annimmt, oder ob man in

jedem eine geschlossene Linie als Begrenzung gezogen denkt, die man sich dann ins Unendliche ausdehnen lässt. In Fig. 55 ist die letztere Darstellungsart der leichteren Ausführbarkeit wegen gewählt. Der Verzweigungsschnitt ist von -1 nach $+1$ gelegt, und die im zweiten Blatte verlaufenden Linien sind durch Puncte angedeutet. Diese Fläche T ist zweifach zusammenhängend, und der Querschnitt muss, um die Fläche nicht zu zerstücken, den Verzweigungsschnitt überschreiten. Er ist durch die Linie adc, von welcher der Theil dc im zweiten Blatte verläuft, bezeichnet worden. Der Periodicitätsmodul ist das Integral

Fig. 55.



$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

ausgedehnt in der Richtung der wachsenden Winkel auf eine geschlossene Linie, welche die beiden Puncte -1 und $+1$, sei es im ersten oder im zweiten Blatte, umgiebt. Nimmt man an, dass in den Puncten, welche im ersten Blatte in unmittelbarer Nähe des von -1 nach $+1$ führenden Verzweigungsschnittes auf der linken Seite liegen, der Quadratwurzel das positive Vorzeichen beigelegt werde, und lässt man die geschlossene Linie im ersten Blatte verlaufen, so kann sie bis zu dem Verzweigungsschnitt verengert werden, und dann wird

$$A = \int_{+}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -2 \int_{-}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Wir haben § 43 gesehen, dass man den Werth dieses Integrals dadurch bestimmen kann, dass man die geschlossene Linie als eine den Punct ∞ umgebende betrachtet, und erhält danach

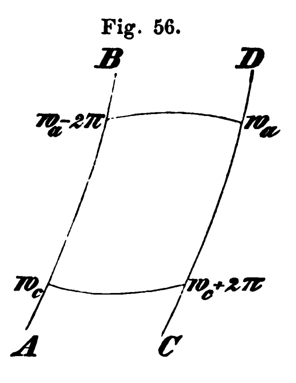
$$A = -2\pi.$$

Für eine im zweiten Blatte verlaufende Linie würde sich ebenso $+2\pi$ ergeben haben; und in der That überschreitet eine im zweiten Blatte in der Richtung der wachsenden Winkel um -1 und $+1$ herumgehende Linie den Querschnitt in entgegenge-

setzter Richtung, wie eine ebensolche Linie im ersten Blatte. Daher ist die inverse Function sin w des vorliegenden Integrals um 2π periodisch.

Um die Abbildungsart der z-Fläche auf der w-Fläche zu finden, lassen wir z die ganze Begrenzung der Fläche T' in positiver Richtung durchlaufen, von a beginnend, wo w den Werth w_a habe. Wird die im ersten Blatte befindliche äussere Begrenzung von der Variablen z durchlaufen, so geht w von w_a bis $w_a - 2\pi$ auf einer Curve, deren Gestalt von der Gestalt der Begrenzungscurve in z abhängt (Fig. 56). Jetzt geht z auf der linken Seite der Querschnittsrichtung ac von a nach c, und w von $w_a - 2\pi$ bis zu einem Werthe, der mit w_c bezeichnet werden möge. Wiederum kann die Curve, auf der dies geschieht, je nach der Gestalt des Querschnitts ac verschieden sein. Ferner durchläuft z von c aus die äussere Begrenzung des zweiten Blattes; dann geht w von w_c nach $w_c + 2\pi$, wo die Uebergangscurve auch erst durch die äussere Begrenzung des zweiten Blattes der z-Fläche bestimmt wird; endlich schliesst z seinen Umlauf, indem es auf der linken Seite der Querschnittsrichtung ca zum Ausgangspuncte zurückkehrt; dann geht auch w von $w_c + 2\pi$ nach w_a zurück; die Curve, auf welcher dies geschieht, muss dem Wege $(w_{a-2\pi}, w_c)$ parallel sein, weil diese beiden Linien den beiden Seiten des Querschnitts entsprechen, und w in je zwei unendlich nahen Puncten der beiden Seiten um 2π verschiedene Werthe hat. Dehnt man jetzt die äusseren Begrenzungen der Fläche T ins Unendliche aus, so rücken auch die Curven $(w_a, w_a - 2\pi)$ und $(w_c, w_c + 2\pi)$ ins Unendliche, und z oder sin w nimmt seine sämmtlichen Werthe innerhalb eines Streifens an, der von den parallelen Curven AB und CD begrenzt wird. In einem solchen nimmt aber z jeden Werth zweimal an, denn da die z-Fläche aus zwei Blättern besteht, so gehören, abgesehen von den Periodicitätsmoduln, jedem Werthe von z zwei Werthe von w an, und daher erhält z oder sin w in zwei verschiedenen Puncten w denselben Werth. Nimmt man den Querschnitt ac längs der Or-

Fig. 56.



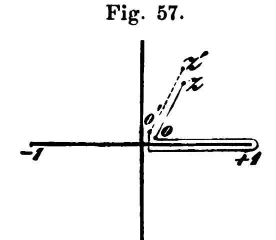
dinatenaxe verlaufend an, sodass zu beiden Seiten desselben $z = iy$ zu setzen ist, (wo y reell); so erhält man

$$w = i \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}},$$

sodass auch w rein imaginär oder um Vielfache des reellen Periodicitätsmoduls 2π von einer rein imaginären Grösse verschieden ist. Alsdann wird die w-Ebene in Streifen getheilt durch gerade Linien, welche der y-Axe parallel laufen und durch die Puncte 0, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, etc. hindurchgehen.

Um nun zu bestimmen, in welcher Beziehung zwei Puncte w und w' stehen, welchen in demselben Streifen gleiche Werthe von z entsprechen, lassen wir die letztere Variable zuerst vom Puncte 0 im ersten Blatte zu dem unmittelbar darunter liegenden $0'$ im zweiten Blatte übergehn, ohne den Querschnitt zu überschreiten. Dies kann geschehen (Fig. 57), indem man längs des Verzweigungsschnittes um $+1$ herum zunächst auf die andere Seite desselben, und dann über ihn hinüber ins zweite Blatt gelangt. Auf diesem Wege erhält man in $0'$ für w den Werth

Fig. 57.



$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \pi.$$

Demnach entspricht dem im zweiten Blatte liegenden Puncte $z = 0'$ der Punct $w = \pi$. Geht man nun im ersten z-Blatte von 0 nach z, so gehe w von 0 nach w. Geht aber z im zweiten Blatte von $0'$ nach z', wo z' unmittelbar unter z liegen möge, so geht w mit dem Werthe π aus, und weil in diesem Theile die Quadratwurzel $\sqrt{1-z^2}$ das negative Vorzeichen hat, so wird

$$w' = \pi - \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

während

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

war; folglich ist

$$w + w' = \pi,$$

oder die Summe der beiden Werthe von w, für welche z oder $\sin w$ denselben Werth erhält, ist constant gleich dem halben Periodicitätsmodul, abgesehen von Vielfachen des letzteren.

4. Das elliptische Integral.

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Hier besteht die z-Fläche ebenfalls aus zwei Blättern, und hat die vier Unstetigkeits- und Verzweigungspuncte $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$. Keiner von diesen braucht ausgeschlossen zu werden, da die Function unter dem Integralzeichen in jedem nur von der Ordnung $\frac{1}{2}$ unendlich wird. Auch der Punct ∞ braucht nicht ausgeschlossen zu werden, da hier

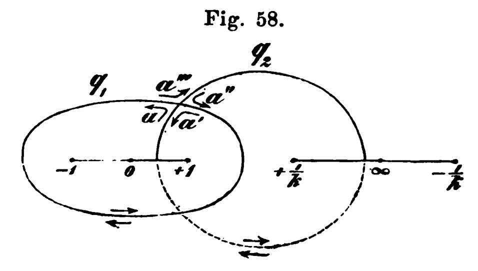
$$\lim zf(z) = \lim \frac{z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \lim \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{z^2}-1\right)(1-k^2z^2)}} = 0$$

ist. Demnach braucht hier gar kein Punct ausgeschlossen zu werden. Dies hängt damit zusammen, dass, wie wir schon § 45 sahen, das vorliegende Integral für jeden Werth von z endlich bleibt, und daher nur durch Hinzufügung eines unendlich grossen Vielfachen eines Periodicitätsmoduls unendlich werden kann. Nehmen wir die z-Fläche im Unendlichen geschlossen an, so haben wir es also hier mit einer gar nicht (oder nur durch einen beliebigen Punct) begrenzten Fläche zu thun, die aber mehrfach zusammenhängend ist. Bei einer solchen muss nach § 47 der erste Querschnitt eine geschlossene Linie sein. Denken wir uns einerseits die Puncte -1 und $+1$, andrerseits die Puncte $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$, durch Verzweigungsschnitte verbunden*), so nehmen wir zum ersten Querschnitt eine Linie q_1, welche die beiden Puncte -1 $+1$ im oberen Blatte umgiebt (Fig. 58). Eine solche zerstückt die Fläche nicht, da man von der einen Seite derselben zur

*) In Fig. 58 ist gleich angenommen worden, dass k reell und kleiner als Eins sei; dann geht der von $+\frac{1}{k}$ nach $-\frac{1}{k}$ führende Verzweigungsschnitt durch ∞ hindurch. Wir werden aber anfangs k als eine ganz beliebige Grösse betrachten und erst nachher auf die Annahme zurückkommen, dass k reell und kleiner als Eins sei.

anderen gelangen kann. Die Art, wie dies geschieht (vgl. § 46. 4)), giebt uns zugleich an, wie der zweite Querschnitt q_2 zu legen ist, nämlich indem man von einem Puncte a des ersten Querschnitts eine Linie zieht, welche den Verzweigungsschnitt $(-1, +1)$ überschreitet, dadurch in das zweite Blatt gelangt, dann über den andern Verzweigungsschnitt hinüber wieder in das erste Blatt zurückkehrt, und so im Ausgangspuncte, aber auf der andern Seite des Querschnitts (in a''') endigt. Jetzt bilden diese beiden

Fig. 58.



Linien zusammen einen ununterbrochenen Zug, bei welchem jeder der beiden Querschnitte zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird. Die Pfeile deuten an, wie dies in positiver Richtung geschieht. In dieser Fläche T' bildet nun jede geschlossene Linie für sich die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, und daher ist die Fläche einfach zusammenhängend. Die Begrenzung derselben wird von den beiden Seiten der Querschnitte gebildet, welche beide innere Seiten sind. Die ursprüngliche Fläche war also dreifach zusammenhängend.

Der Periodicitätsmodul A_1 für den Querschnitt q_1 ist das Integral $\int dw$, in der Richtung der wachsenden Winkel ausgedehnt auf eine geschlossene Linie, welche von der einen Seite dieses Querschnittes auf die andere Seite desselben führt, also z. B. längs q_2. Diese Linie kann verengert werden, bis sie zusammenfällt mit zwei geraden Linien, von denen die eine im ersten Blatte von $\frac{1}{k}$ nach 1, und die andere im zweiten Blatte von 1 nach $\frac{1}{k}$ führt. Nehmen wir an, dass dann im ersten Blatte der Quadratwurzel das Vorzeichen $+$ zugetheilt werde, und setzt man der Kürze wegen

$$\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} = \Delta(z, k),$$

so folgt

$$A_1 = \int_{\frac{1}{k}}^{1} \frac{dz}{\Delta(z,k)} - \int_{1}^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\Delta(z,k)} = -2\int_{1}^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\Delta(z,k)}.$$

Der Periodicitätsmodul A_2 für den zweiten Querschnitt ist ebenso gleich dem Integral längs der Linie q_1, und diese kann wie im vorigen Beispiele bis an den Verzweigungsschnitt verengert werden und giebt dann wie dort

$$A_2 = \int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\Delta(z,k)} - \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\Delta(z,k)} = -2\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\Delta(z,k)}$$

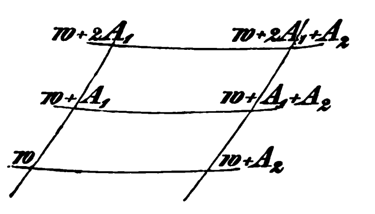
oder auch, wie man leicht übersieht,

$$A_2 = -4\int_{0}^{1} \frac{dz}{\Delta(z,k)}.$$

Das elliptische Integral hat also zwei von einander verschiedene Periodicitätsmoduln; demnach ist die inverse, die sogenannte elliptische Function, die nach *Jacobi* mit sin am w bezeichnet wird, doppelt periodisch.

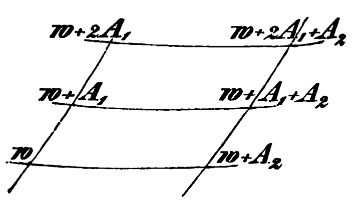
Bilden wir jetzt die Fläche der z auf der Fläche der w ab, so ergiebt sich folgendes: Geht z von a längs des Querschnittes q_1 in der Richtung der wachsenden Winkel und zugleich in der positiven Begrenzungsrichtung, also im Innern der Linie q_1, wieder nach a zurück, (in Fig. 58 von a nach a') so wächst w von w bis $w + A_2$. Dieser Uebergang geschieht auf einer Curve, deren Gestalt von der beliebig zu wählenden Gestalt der Linie q_1 abhängt (Fig. 59); geht nun z weiter längs der Linie q_2 in denselben Richtungen wiederum nach a (also von a' nach a''), so wächst w von $w + A_2$ bis $w + A_2 + A_1$, ebenfalls auf einer Linie, die sich mit der Gestalt von q_2 ändert. Durchläuft dann z von a'' aus die Linie q_1 immer noch in der positiven Begrenzungsrichtung, aber jetzt in der Richtung der abnehmenden Winkel (also von a'' nach a'''), so geht w von $w + A_2 + A_1$ bis $w + A_1$, da es um A_2 abnimmt. Die Curve, auf welcher dieser Uebergang von w geschieht, muss der Curve $(w, w + A_2)$ parallel sein, weil in je

Fig. 59.



zwei zu beiden Seiten der Linie q_1 liegenden unendlich nahen Puncten die beiden Werthe von w um die Grösse A_1 verschieden sind, und daher den beiden Seiten dieses Querschnittes in w zwei verschiedene aber parallele Linien entsprechen. Geht endlich z von a''' längs des Querschnittes q_2 nach a, so geht w von $w + A_1$ nach w auf einer Linie, die aus denselben Gründen wie vorhin der Linie $(w+A_2,\ w + A_1 + A_2)$ parallel sein muss. Den beiden Seiten des Querschnittes q_1 entsprechen also die Parallelen $(w,\ w + A_2)$ und $(w + A_1,\ w + A_1 + A_2)$, und den beiden Seiten des Querschnittes q_2 die Parallelen $(w,\ w + A_1)$ und $(w + A_2,\ w + A_2+A_1)$. Nun entsprechen sämmtlichen Puncten z auf der ganzen unendlichen z-Fläche nur solche Puncte w, welche innerhalb des krummlinig begrenzten Parallelogramms liegen, denn durch jeden beliebigen Punct der z-Fläche kann man eine Linie legen, welche von der einen Seite von q_1 nach der andern Seite von q_1 führt, ohne einen Querschnitt zu überschreiten; daher führt die entsprechende Linie w von der Linie $(w,\ w + A_2)$ durch das Innere des Parallelogramms nach der Linie $(w+A_1,\ w+A_2+A_1)$. Demnach nimmt z oder sin am w seine sämmtlichen Werthe in diesem Parallelogramm an, und zwar jeden Werth zwei Mal, weil die z-Fläche aus zwei Blättern besteht.

Fig. 59.



An dieses Parallelogramm schliessen sich nun an allen Seiten andere Parallelogramme an. Denn lässt man z. B. z von a bis nach a''' gehen, so ist w nach $w + A_1$ gegangen. Lässt man nun aber w über den Querschnitt q_1 hinüber sich stetig fortsetzen, so geht jetzt w mit dem Werthe $w + A_1$ aus a aus; an die Seite $(w + A_1,\ w + A_1 + A_2)$ schliesst sich daher ein neues Parallelogramm an, in dessen Ecken w die Werthe

$$w + A_1,\ w + A_1 + A_2,\ w + 2A_1 + A_2,\ w + 2A_1$$

hat. Ebenso ist es an den übrigen drei Seiten. Auf diese Weise wird die ganze Ebene der w durch zwei Schaaren paralleler Linien in Parallelogramme getheilt. Nimmt man an, dass k reell und kleiner als 1 ist, so liegen die vier Puncte $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ auf der Hauptaxe; verengert man nun die bei-

den Querschnitte so, dass sie zu beiden Seiten der Hauptaxe verlaufen, so werden die Parallellinien Gerade, welche resp. der x- und y-Axe parallel laufen. Denn in diesem Falle ist

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

reell; man pflegt den Werth dieses Integrals nach *Jacobi* mit K zu bezeichnen; das andere Integral

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

dagegen ist rein imaginär. Setzt man $\sqrt{1-k^2} = k'$ und transformirt das Integral durch die Substitution

$$z = \frac{\sqrt{1-k'^2z'^2}}{k},$$

so erhält man

$$-i\int_0^1 \frac{dz'}{\sqrt{(1-z'^2)(1-k'^2z'^2)}},$$

was analog mit $-iK'$ bezeichnet wird. Demnach sind die Periodicitätsmoduln, abgesehen vom Zeichen,

$$4K \quad \text{und} \quad 2iK'.$$

Man kann auch hier wieder bestimmen, in welcher Beziehung je zwei Werthe von w stehen, welche demselben Werthe von z, d. h. zwei unmittelbar unter einander liegenden Puncten der z-Fläche entsprechen. Dem Werthe $z = 0$ im ersten Blatte entspricht $w = 0$. Um nun zu $0'$ im zweiten Blatt zu kommen, kann man sich den Querschnitt q_2 so erweitert denken, dass er ausser den Puncten 1 und $\frac{1}{k}$ auch noch den Nullpunct umgiebt. Dann kann man innerhalb T' von 0 aus längs des Verzweigungsschnittes um $+1$ herum auf die andere Seite, und dann über den Verzweigungsschnitt hinüber nach $0'$ kommen, (Vgl. S. 186) und dann erhält w in $0'$ den Werth

$$\int_0^1 \frac{dz}{\Delta(z,k)} - \int_1^0 \frac{dz}{\Delta(z,k)} = 2K,$$

ist also gleich der Hälfte des einen Periodicitätsmoduls. Geht man nun weiter von $0'$ nach z', wo z' unmittelbar unter z im

zweiten Blatt liege, so ist, wenn der Werth von w in z' mit w' bezeichnet wird,

$$w' = 2\,K - \int_0^z \frac{dz}{\Delta(z,k)},$$

während

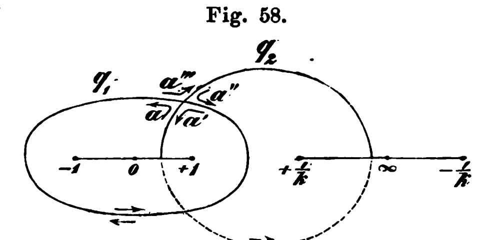
$$w = \int_0^z \frac{dz}{\Delta(z,k)}$$

war, und man erhält

$$w + w' = 2\,K.$$

Nimmt man das Integral $\int dw$ längs einer geschlossenen Linie, welche alle vier Verzweigungspuncte umgiebt, so verläuft eine

Fig. 58.



solche ganz im ersten Blatte und bildet daher für sich allein eine vollständige Begrenzung. Demnach hat dies Integral den Werth Null. Verengert man diese Linie bis zur Hauptaxe, auf welcher die vier Verzweigungspuncte liegen, so zerlegt sich das Integral in folgende Theile (die Linie möge in der Richtung der abnehmenden Winkel durchlaufen werden):

1) Von -1 bis $+1$; 2) von $+1$ bis $+\frac{1}{k}$; 3) von $+\frac{1}{k}$ durch ∞ bis $-\frac{1}{k}$

6) von $+1$ bis -1; 5) von $+\frac{1}{k}$ bis $+1$; 4) von $-\frac{1}{k}$ durch ∞ bis $+\frac{1}{k}$.

Dabei ist die Quadratwurzel in 6) und 4) negativ zu nehmen, weil bei diesen der Integrationsweg auf der rechten Seite der Verzweigungsschnitte $(-1, +1)$ und $(+\frac{1}{k}, -\frac{1}{k})$ liegt, in allen übrigen positiv. Demnach heben sich 2) und 5) auf, und 1) und 3) werden verdoppelt. Da ferner

$$1) = 2\int_0^1 \frac{dz}{\Delta(z,k)} \qquad 3) = 2\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{\Delta(z,k)}$$

ist, so erhält man

$$\int_0^1 \frac{dz}{\Delta(z,k)} + \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{\Delta(z,k)} = 0,$$

und daher

$$\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{\Delta(z,k)} = -K.$$

Hieraus folgt auch der Werth des Integrals zwischen den Grenzen 0 und ∞, denn da dieses sich in die Theile $0 \cdots 1$, $1 \cdots \frac{1}{k}$, $\frac{1}{k} \cdots \infty$ zerlegt, so erhält man

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{\Delta(z,k)} = K - iK' - K = -iK',$$

oder da man diesem Werthe den Periodicitätsmodul $2iK'$ hinzufügen kann, auch

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{\Delta(z,k)} = iK'.$$

Innerhalb des Parallelogramms mit den Ecken 0, $4K$, $4K + 2iK'$ und $2iK'$ wird also z unendlich für $w = iK'$ und $w = 2K + iK'$.

Wir wollen auch hier nach *Riemann* die Beziehung zwischen der doppelt periodischen Function und dem elliptischen Integral in umgekehrter Weise, nämlich von der doppelt periodischen Function ausgehend, betrachten. Sei $\varphi(w)$ eine einwerthige doppelt periodische Function, also von der Eigenschaft, dass zugleich

$$\varphi(w + A_1) = \varphi(w) \quad \text{und} \quad \varphi(w + A_2) = \varphi(w)$$

sei. Dann müssen die geraden Linien, welche die complexen Grössen A_1 und A_2 darstellen, verschiedene Richtung haben. Denn haben sie gleiche Richtung, so müssen A_1 und A_2 nach § 2. 3) ein reelles Verhältniss besitzen. Dieses kann entweder rational oder irrational sein. Ist es rational, so sind A_1 und A_2 commensurabel und daher Vielfache einer und derselben Grösse B. Man kann also setzen

$$A_1 = mB \qquad A_2 = nB,$$

wo m und n zwei ganze Zahlen bedeuten, die relative Primzahlen zu einander sind, und hat dann

$$\varphi(w) = \varphi(w + mB) = \varphi(w + nB).$$

Da es nun in diesem Falle zwei ganze Zahlen a und b giebt, für welche

$$ma - nb = 1,$$

und da ausserdem

$$\varphi(w + maB - nbB) = \varphi(w)$$

ist, so ist auch

$$\varphi(w + B) = \varphi(w),$$

und daher ist die Function $\varphi(w)$ in diesem Falle einfach und nicht doppelt periodisch. Haben aber A_1 und A_2 ein reelles irrationales Verhältniss, sodass sie incommensurabel sind, so giebt es stets zwei ganze Zahlen m und n, für welche

$$mA_1 + nA_2$$

kleiner als eine noch so klein angenommene Grösse wird. Da nun auch

$$\varphi(w + mA_1 + nA_2) = \varphi(w)$$

ist, so behält jetzt die Function $\varphi(w)$ bei beliebig kleinen Aenderungen der Variablen denselben Werth und ist daher eine Constante. Demnach muss bei einer doppelt periodischen Function das Verhältniss der beiden Periodicitätsmoduln imaginär sein, also müssen die Geraden A_1 und A_2 verschiedene Richtung haben. Dann aber kann man die Ebene der w durch zwei Schaaren paralleler Linien in Parallelogramme theilen, sodass $\varphi(w)$ auf je zwei Parallelen dieselben Werthe erhält; sie nimmt dann ferner in jedem Parallelogramm ihre sämmtlichen Werthe an und hat in je zwei entsprechenden Puncten verschiedener Parallelogramme gleiche Werthe.

Da nun die einwerthige Function $\varphi(w)$ für irgend einen Werth von w unendlich gross werden muss (§ 28), so muss sie in jedem Parallelogramm unendlich gross werden. Heben wir daher irgend ein Parallelogramm heraus (Fig. 60), und seien r, r', r'', etc. die Puncte desselben, in welchen $\varphi(w)$ unendlich gross wird. Bildet man das Integral

$$\int \varphi(w)\, dw,$$

längs der Begrenzung des Parallelogramms genommen, so ist dasselbe (nach § 19) gleich der Summe der Integrale um die Unstetigkeitspuncte r, r', r'', etc. Wird also $\varphi(w)$ in diesen Puncten unendlich, wie resp.

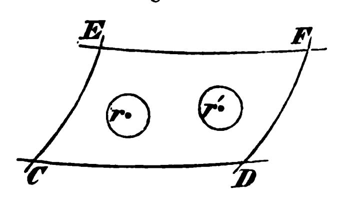
$$\frac{c}{w-r} + \cdots, \quad \frac{c'}{w-r'} + \cdots, \quad \frac{c''}{w-r''} + \cdots, \text{ etc.,}$$

so ist

$$\int \varphi(w)\, dw = 2\pi i\, (c + c' + c'' + \cdots).$$

Nun hat aber $\varphi(w)$ auf der Seite CE dieselben Werthe wie auf DF und auf CD dieselben wie auf EF, und beim Durchlaufen der Begrenzung des Parallelogramms werden die parallelen Seiten in entgegengesetzter Richtung durchlaufen; die Integrale längs dieser Seiten heben sich daher auf, und es ist

Fig. 60.



$$\int \varphi(w)\, dw = 0.$$

Folglich ist auch

$$c + c' + c'' + \cdots = 0.$$

Hieraus geht hervor, dass $\varphi(w)$ in jedem Parallelogramm mehr als einmal unendlich werden muss, und zwar mindestens entweder zwei Mal von der ersten Ordnung oder einmal von der zweiten Ordnung. Bezeichnet im Allgemeinen n die Anzahl, wie oft $\varphi(w)$ in jedem Parallelogramm unendlich gross wird, so kann zunächst gezeigt werden, dass $\varphi(w)$ auch jeden Werth h innerhalb eines Parallelogramms n Mal annehmen muss. Dazu betrachten wir das Integral

$$\int d \log\, (\varphi(w) - h) \text{ oder} \int \frac{\varphi'(w)\, dw}{\varphi(w) - h},$$

ausgedehnt auf die Begrenzung des Parallelogramms. Auch dieses hat den Werth Null, weil sowohl $\varphi(w) - h$ als auch $\varphi'(w)$ auf den gegenüberliegenden Seiten gleiche Werthe haben. Andrerseits aber ist dieses Integral auch gleich der Summe der Integrale, um die Puncte, für welche $\varphi'(w)$ unendlich gross wird, und um die, in welchen $\varphi(w) - h$ verschwindet. Die ersteren sind dieselben wie die, für welche $\varphi(w)$ oder $\varphi(w) - h$ unendlich wird (§ 29). Ist nun im Allgemeinen α ein Punct, für welchen $\varphi(w) - h$ entweder unendlich klein oder unendlich gross wird, und zwar von der $p$ten Ordnung (p positiv beim unendlich klein Werden), so kann man setzen (§ 34)

$$\varphi(w) - h = (w - \alpha)^p\, \psi(w),$$

wo $\psi(w)$ für $w = \alpha$ weder Null noch unendlich ist, und erhält

$$\int d \log (\varphi(w) - h) = p \int \frac{dw}{w - \alpha} + \int \frac{\psi'(w)\, dw}{\psi(w)}$$

$$= 2\pi i\, p.$$

Auf das ganze Parallelogramm ausgedehnt ist also

$$\int d \log (\varphi(w) - h) = 2\pi i\, \Sigma p,$$

und daher

$$\Sigma p = 0.$$

Nun wird $\varphi(w) - h$, wie $\varphi(w)$, n Mal unendlich gross; bezeichnet man mit m die Anzahl, wie oft es verschwindet, so ist

$$\Sigma p = m - n = 0,$$

und daher

$$m = n.$$

Da also $(\varphi(w) - h)$ n Mal verschwinden muss, so wird $\varphi(w)$ auch n Mal $= h$.

Wir betrachten nun im Folgenden nur den einfachsten Fall, wo $\varphi(w)$ in jedem Parallelogramm zwei Mal unendlich gross wird, also auch jeden Werth zwei Mal annimmt, und setzen zuerst voraus, $\varphi(w)$ werde in zwei Puncten r und s unendlich gross von der ersten Ordnung. Dann kann man setzen, $\varphi(w)$ mit z bezeichnet,

$$z = \varphi(w) = \frac{c}{w - r} + \frac{c'}{w - s} + \psi(w),$$

und weil

$$c + c' = 0$$

sein muss,

(39) $$z = \varphi(w) = \frac{c}{w - r} - \frac{c}{w - s} + \psi(w),$$

wo c eine gegebene Constante bezeichne, und $\psi(w)$ eine Function, die in dem betrachteten Parallelogramm nicht mehr, also nur noch in den anderen Parallelogrammen, nämlich in den Puncten $r + mA_1 + nA_2$; $s + mA_1 + nA_2$ (für m und n alle positiven und negativen ganzen Zahlen gesetzt) unendlich wird. Wir suchen nun zuerst die Beziehung zwischen den beiden Werthen w auf, für welche $\varphi(w)$ gleiche Werthe erhält. Zu dem Ende sei

$$v = r + s - w.$$

Setzt man in (39) v statt w, so ist

$$\varphi(v) = \frac{c}{v - r} - \frac{c}{v - s} + \psi(v).$$

Da man aber

$$v - r = -(w - s)$$
$$v - s = -(w - r)$$

hat, so folgt

$$\varphi(v) = -\frac{c}{w-s} + \frac{c}{w-r} + \psi(v)$$

und daher

$$\varphi(w) - \varphi(v) = \psi(w) - \psi(v).$$

Diese Differenz bleibt also in dem ersten Parallelogramme endlich. Nun wird in einem anstossenden Parallelogramme $\varphi(w)$ unendlich gross in $w = r + A_1$ und $w = s + A_1$; man kann daher auch setzen

$$\varphi(w) = \frac{c_1}{w-r-A_1} - \frac{c_1}{w-s-A_1} + \psi_1(w),$$

wo jetzt $\psi_1(w)$ für alle Puncte des zweiten Parallelogrammes endlich bleibt. Führt man nun

$$v_1 = r + s + 2A_1 - w$$

ein, so ist

$$w - r - A_1 = -(v_1 - s - A_1)$$
$$w - s - A_1 = -(v_1 - r - A_1),$$

und daher hat man auch

$$\varphi(v_1) = -\frac{c_1}{w-s-A_1} + \frac{c_1}{w-r-A_1} + \psi_1(v_1).$$

Demnach ist

$$\varphi(w) - \varphi(v_1) = \psi_1(w) - \psi_1(v_1)$$

und bleibt innerhalb des zweiten Parallelogramms endlich. Da aber v_1 sich von v nur um das Doppelte des Periodicitätsmoduls A_1 unterscheidet, so ist

$$\varphi(v_1) = \varphi(v),\ \varphi(w) - \varphi(v_1) = \varphi(w) - \varphi(v)$$

und daher bleibt die Differenz

$$\varphi(w) - \varphi(v)$$

sowohl in dem ersten, als auch in dem zweiten Parallelogramm endlich. Geht man auf diese Weise von Parallelogramm zu Parallelogramm fort, so zeigt sich, dass diese Differenz in keinem Parallelogramme, also gar nicht unendlich wird und daher constant sein muss. Um den Werth dieser Constanten zu ermitteln, setze man $w = \frac{r+s}{2}$, dann wird

$$v = \frac{r+s}{2} = w,$$

und da die Function φ einwerthig ist, auch

$$\varphi(v) = \varphi(w).$$

Da also die Differenz $\varphi(w) - \varphi(v)$ für einen Werth von w den Werth Null hat, so hat sie diesen stets, und daher ist

$$\varphi(r + s - w) = \varphi(w).$$

Demnach sind w und $r + s - w$ die beiden zusammengehörigen Werthe, für welche die Function $\varphi(w)$ gleiche Werthe erhält.

Nun folgt aus (39)

$$\varphi'(w) = \frac{dz}{dw} = -\frac{c}{(w-r)^2} + \frac{c}{(w-s)^2} + \psi'(w);$$

also ist die Derivirte $\varphi'(w)$, abgesehen von den Periodicitätsmoduln, auch nur für $w=r$ und $w=s$ unendlich gross, aber von der zweiten Ordnung. Sie wird daher in jedem Parallelogramme vier Mal unendlich und nimmt also auch jeden Werth vier Mal an. Sie ist ebenfalls eine einwerthige Function von w; wichtig aber ist es zu untersuchen, ob sie auch eine einwerthige Function von z ist. Nun erhält die Derivirte $\frac{dz}{dw}$ in je zwei entsprechenden Puncten verschiedener Parallelogramme, in denen z gleiche Werthe hat, ebenfalls gleiche Werthe. Man hat also nur die Puncte v und w desselben Parallelogramms zu betrachten. Differentiirt man die Gleichung

$$\varphi(w) = \varphi(v)$$

nach w, so erhält man, da

$$\frac{dv}{dw} = -1$$

ist,

$$\varphi'(w) = -\varphi'(v).$$

Demnach erhält zwar z für v und w gleiche Werthe, $\frac{dz}{dw}$ aber entgegengesetzte, also ist $\frac{dz}{dw}$ nicht eine einwerthige Function von z, da es für denselben Werth von z zwei verschiedene Werthe annehmen kann. Da aber diese gleich und entgegengesetzt sind, so folgt, dass $\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$ eine einwerthige Function von z ist. Nun wird $\frac{dz}{dw}$ nur da unendlich, wo auch z unendlich ist, und zwar von der zweiten Ordnung, wo z von der ersten Ordnung unendlich ist; demnach wird $\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$ an derselben Stelle von der vierten

Ordnung unendlich; also ist $\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$ eine einwerthige Function von z, welche nur für $z=\infty$ und hier von der vierten Ordnung unendlich wird, und folglich eine ganze Function vierten Grades von z. Eine solche wird auch 4 Mal Null. Bezeichnet man die Werthe von z, für welche dies geschieht, mit α, β, γ, δ, und mit C eine Constante, so ist

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^2 = C\,(z-\alpha)\,(z-\beta)\,(z-\gamma)\,(z-\delta), \tag{40}$$

und hieraus folgt

$$w=\int\frac{dz}{\sqrt{C\,(z-\alpha)\,(z-\beta)\,(z-\gamma)\,(z-\delta)}}\,.$$

Eine doppelt periodische Function, welche in jedem Parallelogramm zwei Mal von der ersten Ordnung unendlich wird, ist daher die inverse Function eines elliptischen Integrals. Die Constante C kann durch c ausgedrückt werden. Denn da nach (40)

$$C=\left[\lim\frac{\left(\frac{dz}{dw}\right)^2}{z^4}\right]_{z=\infty}$$

ist, so erhält man

$$C=\left[\lim\frac{\left[-\frac{c}{(w-r)^2}+\frac{c}{(w-s)^2}+\psi'(w)\right]^2}{\left[\frac{c}{w-r}-\frac{c}{w-s}+\psi(w)\right]^4}\right]_{w=r}$$

$$=\lim\frac{\left[-c+\frac{c\,(w-r)^2}{(w-s)^2}+(w-r)^2\,\psi'(w)\right]^2}{\left[c-\frac{c\,(w-r)}{w-s}+(w-r)\,\psi(w)\right]^4}$$

$$=\frac{c^2}{c^4}=\frac{1}{c^2},$$

und dadurch wird

$$w=\int\frac{c\,dz}{\sqrt{(z-\alpha)\,(z-\beta)\,(z-\gamma)\,(z-\delta)}}\,.$$

Dieses Integral gestattet eine ganz ähnliche Behandlung wie das frühere

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-k^2z^2)}},$$

indem hier an Stelle von $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ die vier Verzweigungspuncte α, β, γ, δ treten; es kann auch durch eine Transformation in das letztere übergeführt werden.

Wir gehn nun zu dem Falle über, wo die Function $\varphi(w)$ nur in einem Puncte $w=r$ und hier von der zweiten Ordnung unendlich wird. In diesem Falle muss man setzen

$$z=\varphi(w)=\frac{c}{(w-r)^2}+\psi(w);$$

denn das in $(w-r)^{-1}$ multiplicirte Glied muss fehlen, damit $\int\varphi(w)\,dw$ ausgedehnt auf die Begrenzung des Parallelogramms gleich Null werde. Man schliesst hier ebenso wie oben, indem man $s=r$ setzt, dass

$$\varphi(2r-w)=\varphi(w)$$

und daher

$$\varphi'(2r-w)=-\varphi'(w)$$

ist. Daher ist $\frac{dz}{dw}$ nicht, wohl aber wieder $\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$ eine einwerthige Function von z; nun ist

$$\frac{dz}{dw}=-\frac{2c}{(w-r)^3}+\psi'(w),$$

also wird $\frac{dz}{dw}$ nur da unendlich, und zwar von der 3ten Ordnung, wo z von der zweiten Ordnung unendlich ist. In Beziehung auf z ist also $\frac{dz}{dw}$ für $z=\infty$ von der Ordnung $\frac{3}{2}$ unendlich, und folglich $\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$ von der dritten Ordnung. Demnach hat man in diesem Falle

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^2=C(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma).$$

Darin ist

$$C=\left[\lim\frac{\left(\frac{dz}{dw}\right)^2}{z^3}\right]_{z=\infty}=\left[\lim\frac{\left(-\frac{2c}{(w-r)^3}+\psi'(w)\right)^2}{\left(\frac{c}{(w-r)^2}+\psi(w)\right)^3}\right]_{w=r}$$

$$=\lim\frac{(-2c+(w-r)^3\psi'(w))^2}{(c+(w-r)^2\psi(w))^3}=\frac{4c^2}{c^3}=\frac{4}{c};$$

mithin

$$\frac{dz}{dw}=\frac{4}{c}(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)$$

und

$$w=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{c}\,.\,dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}}$$

welches ebenfalls ein elliptisches Integral ist.

Hiermit brechen wir diese Betrachtungen ab, da es nicht in der Absicht dieses Buches liegt, näher auf die Untersuchung der periodischen Functionen einzugehen, sondern die behandelten Fälle nur als Beispiele zur Erläuterung der allgemeinen Betrachtungen angesehen werden sollen. In Betreff der eigenthümlichen Natur, welche denjenigen Functionen innewohnt, die mehr als zwei Periodicitätsmoduln besitzen, möge auf die schöne und lichtvoll geschriebene Abhandlung von *Prym:* Theoria nova functionum ultraellipticarum (Inaug. Diss.) Berlin 1863 verwiesen werden.

Elfter Abschnitt.

Bestimmung einer Function durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen.

---

§ 53.

Wenn man als Definition einer Function einen Ausdruck zu Grunde legt, so ist dadurch ihr Werth für jeden Werth der Variablen gegeben. Wir haben aber schon früher (§ 25) gesehen, dass es zur Bestimmung einer Function einer complexen Veränderlichen innerhalb eines gewissen Gebietes nicht nothwendig ist, dass ihr Werth für jeden Werth der Variablen in diesem Gebiete gegeben sei, sondern dass schon ein geringerer Theil von Bestimmungsstücken hinreicht, von denen die übrigen dann eine Folge sind. *Riemann* hat nun gezeigt, dass man mit Bestimmtheit angeben kann, welches die zur Bestimmung einer Function nothwendigen und hinreichenden Stücke sind, und dadurch den Weg eröffnet, bestimmte Functionen auch ohne Zugrundelegung eines Ausdrucks für dieselben zu untersuchen. Hierauf soll in diesem Abschnitte noch etwas näher eingegangen werden.

Es ist § 5 gezeigt worden, dass wenn

$$w = u + iv$$

eine Function einer complexen Variablen

$$z = x + iy$$

sein soll, die reellen Theile u und v den partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

genügen müssen, oder auch, dass

(41) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

sein muss. Wir wollen nun, um mit dem einfachsten Falle zu beginnen, annehmen, die Function w sei innerhalb einer einfach zusammenhängenden Fläche T überall endlich und stetig, und dann zeigen, dass sie in derselben bis auf eine additive Constante vollständig bestimmt ist, sobald ihr reeller Theil u auf der Begrenzung von T gegeben ist, d. h. wenn die Werthe von u in allen Puncten dieser Begrenzung auf beliebige Weise gewählt sind, wobei wir jedoch voraussetzen wollen, dass sich u, wenn es nicht längs der ganzen Begrenzung constant ist, von einem Puncte derselben zum andern stetig ändert.

Wir betrachten dazu das Flächenintegral

$$\Omega\,(\alpha) = \iint \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2\right] dx dy,$$

ausgedehnt auf die Fläche T. Wenn darin α eine reelle überall in T endlich bleibende Function von x und y ist, so hat auch $\Omega\,(\alpha)$ einen endlichen Werth, und zwar einen positiven, da sämmtliche Elemente des Integrals positiv sind. Unter allen diesen positiven Werthen, welche $\Omega\,(\alpha)$ für verschiedene Functionen α annimmt, muss es einen geben, welcher der kleinste ist. Setzt man nun an Stelle von α nur Functionen u, welche an der Grenze von T gegebene Werthe haben, so wollen wir zeigen, dass unter diesen diejenige dem Integral $\Omega\,(u)$ den kleinsten Werth zuertheilt, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügt. Um dies zu beweisen, bezeichnen wir mit σ eine beliebige reelle in T endlich bleibende Function von x und y, und mit h eine unendlich kleine Constante, und untersuchen, unter welcher Bedingung stets

$$\Omega\,(u + h\sigma) > \Omega\,(u)$$

ist, während σ an der Grenze, wo u gegebene Werthe hat, also

einen Zuwachs $h\sigma$ nicht erleiden darf, verschwindet. Man hat nun

$$\Omega(u+h\sigma) = \int\!\!\int \left[\left(\frac{\partial(u+h\sigma)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(u+h\sigma)}{\partial y}\right)^2\right] dxdy$$

$$= \int\!\!\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dxdy + 2h \int\!\!\int \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right] dxdy$$

$$+ h^2 \int\!\!\int \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)^2\right] dxdy$$

oder

$$\Omega(u+h\sigma) = \Omega(u) + 2h \int\!\!\int \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right] dxdy + h^2\,\Omega(\sigma). \quad (42)$$

Demnach ist die Bedingung dafür, dass für alle Functionen σ und für jedes positive oder negative h

$$\Omega(u+h\sigma) > \Omega(u)$$

sei, die folgende

$$\int\!\!\int \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right] dxdy = 0. \quad (43)$$

Auf dieses Flächenintegral können nun Betrachtungen ähnlicher Art, wie die § 17 angestellten, angewendet werden. Durch theilweise Integration erhält man nämlich

$$\int\!\!\int \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \sigma}{\partial x}\, dxdy = \int \sigma \frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \int\!\!\int \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dxdy$$

$$\int\!\!\int \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \sigma}{\partial y}\, dxdy = \int \sigma \frac{\partial u}{\partial y}\, dx - \int\!\!\int \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\, dxdy,$$

worin die einfachen Integrale sich auf die Begrenzung von T beziehen. Nimmt man aber an, dass diese in positiver Richtung durchlaufen wird, so hat man, wie § 17 erörtert worden ist, dem Integrale

$$\int \sigma \frac{\partial u}{\partial y}\, dx$$

das entgegengesetzte Zeichen zu geben. Demnach geht die Gleichung (43) in folgende

$$-\int \sigma \left(\frac{\partial u}{\partial y}\, dx - \frac{\partial u}{\partial x}\, dy\right) - \int\!\!\int \sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dxdy = 0 \quad (44)$$

über. Hierin verschwindet das Linienintegral von selbst, weil es sich nur auf die Begrenzung von T bezieht, und hier σ gleich Null ist. Also muss das Flächenintegral verschwinden, und damit dies für jede Function σ geschehe, muss

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

sein. Demnach ertheilt unter allen Functionen u, welche an der Grenze von T gegebene Werthe annehmen und im Innern von T endlich bleiben, diejenige dem Integral $\Omega(u)$ den kleinsten Werth, welche der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügt. Man kann nun aber auch zeigen, dass es nur eine solche Function u geben kann; denn wäre $u + \vartheta$ eine zweite, welche ebenfalls jener partiellen Differentialgleichung genügt, welche ferner an der Grenze von T auch die gegebenen Werthe annimmt, sodass an der Grenze $\vartheta = 0$ ist, und für welche Ω ebenfalls ein Minimum wird, so würde man der Gleichung (42) gemäss, indem ϑ an die Stelle von $h\sigma$ tritt, haben

$$\Omega\,(u + \vartheta) = \Omega\,(u) + \Omega\,(\vartheta),$$

da die Gleichung (43) oder (44) durch die gegebenen Bedingungen in Erfüllung geht. Aus dieser Gleichung folgt aber, dass $\Omega\,(\vartheta)$ verschwinden muss, sodass das Integral $\Omega\,(u)$ nur einen Minimalwerth haben kann. Denn zuerst ist jedenfalls $\Omega\,(u + \vartheta)$ nicht kleiner als $\Omega\,(u)$, da $\Omega\,(\vartheta)$ nicht negativ sein kann; wäre aber $\Omega\,(u + \vartheta)$ grösser als $\Omega\,(u)$, und daher $\Omega\,(\vartheta)$ nicht Null, so würde man auch die Gleichung

$$\Omega\,(u + h\vartheta) = \Omega\,(u) + h^2\,\Omega\,(\vartheta)$$

aufstellen können, und dann würde für positive oder negative Werthe von h, die numerisch < 1 sind,

$$\Omega\,(u + h\vartheta) < \Omega\,(u + \vartheta),$$

und daher $\Omega\,(u + \vartheta)$ nicht ein Minimalwerth sein. Demnach muss $\Omega\,(\vartheta)$ verschwinden und $\Omega\,(u + \vartheta) = \Omega\,(u)$ sein. Das Integral $\Omega\,(u)$ hat also nur ein Minimum; und dieses wird auch nur für eine Function u erreicht, denn da alle Elemente von $\Omega\,(\vartheta)$ positiv sind, so kann dieses nicht anders verschwinden, als wenn

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)^2 = 0$$

d. h.

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0 \text{ und } \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0$$

ist. Daraus folgt, dass ϑ eine Constante ist, und da sie an der Grenze den Werth Null hat, so ist sie überall Null. Demnach hat $\Omega\,(u)$ nur ein Minimum und erreicht dasselbe auch nur für eine Function u von der obigen Beschaffenheit. Nun muss aber dieses Integral, da es nur positive Werthe annehmen kann, noth-

wendig für eine Function u den kleinstmöglichen Werth erhalten, und daher existirt auch immer eine und nur eine Function u von der obigen Beschaffenheit. Wir haben damit folgenden Satz gewonnen: Es giebt stets eine und nur eine reelle Function u von x und y, welche an der Begrenzung einer einfach zusammenhängenden Fläche T gegebene, entweder constante, oder stetig längs derselben sich ändernde Werthe hat, im Innern von T überall stetig ist und der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügt.

Soll nun u der reelle Theil der Function $w = u + iv$ von $z = x + iy$ sein, so muss er dieser Differentialgleichung genügen, und ist daher im Innern einer einfach zusammenhängenden Fläche T vollkommen bestimmt, sobald er an der Begrenzung von T gegeben ist. Dadurch ist dann aber v ebenfalls bestimmt, denn das vollständige Differential dv ist

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\, dx + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy,$$

oder wenn man die Gleichungen (41) anwendet,

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy, \tag{45}$$

also durch u allein ausgedrückt. Das Integral dieses vollständigen Differentials

$$v = \int_{x_0,\, y_0}^{x,\, y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy\right)$$

von einem beliebigen festen Puncte (x_0, y_0) ausgehend und auf irgend einem in T verlaufenden Integrationswege bis zu einem veränderlichen Puncte (x, y) genommen, hat in diesem einen von dem Integrationswege unabhängigen Werth (§ 18); und daher ist auch v vollkommen bestimmt, sobald ihr Werth für den beliebig in T zu wählenden Punct (x_0, y_0) gegeben ist. Dieser Werth mit i multiplicirt bildet eine rein imaginäre Constante, und folglich ist eine Function $w = u + iv$ einer complexen Variablen, die in einer einfach zusamenhängenden Fläche T endlich und stetig bleiben soll, in derselben bis auf eine additive rein imaginäre Constante bestimmt, wenn ihr reeller Theil u längs der Begrenzung von T gegeben ist; die Constante ist ebenfalls

bestimmt, wenn der Werth des imaginären Theils iv von w für irgend einen Punct der Fläche T gegeben ist.

In dem besonderen Falle, dass u längs der Begrenzung von T constant ist, kann leicht gezeigt werden, dass auch w innerhalb T constant sein muss. Denn die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

hat jedenfalls die Lösung

$$u = \text{Const.},$$

und giebt man der Constanten den Werth, den u an der Grenze haben soll, so genügt diese Lösung auch der Grenzbedingung. Damit ist u bestimmt, da bewiesen worden ist, dass jene Differentialgleichung nur eine einzige Lösung besitzt, welche zugleich der Grenzbedingung genügt. Wenn aber u constant ist, so sind $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ beide gleich Null, und daher ist (nach 45) auch v constant. Demnach ergiebt sich: Ist der reelle Theil u von w an der Begrenzung einer einfach zusammenhängenden Fläche T constant, und soll w in T endlich und stetig bleiben, so hat auch w in der ganzen Fläche T einen constanten Werth.

Ist die Fläche T im Unendlichen geschlossen, und daher nur durch einen Punct begrenzt, so ist auch u nur für diesen Punct gegeben. Die Bedingung, dass auch v in einem Puncte bekannt sei, vereinigt sich dann mit der vorigen dahin, dass w selbst in einem Puncte gegeben ist. In diesem Falle wird aber der Differentialgleichung ebenfalls nur durch eine Constante genügt, welche den im Begrenzungspuncte gegebenen Werth von u hat, und daher ist w eine Constante. Wir gelangen also in Uebereinstimmung mit § 28 zu dem Resultat, dass eine in einer ins Unendliche gehenden einfach zusammenhängenden Fläche überall endlich und stetig bleibende Function eine Constante sein muss.

§ 54.

Wir gehen nun dazu über, anzunehmen, dass die zu bestimmende Function innerhalb der einfach zusammenhängenden Fläche T auch unendlich werden darf. Dann lässt sich das Princip,

auf welches sich die Betrachtung des vorigen § stützt, nicht ohne Weiteres anwenden, weil in diesem Falle das Integral

$$\int\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dxdy$$

unendlich gross wird. Ist nämlich $f(z) = w = u + iv$ für einen Punct $z = a$ im Innern der Fläche T, auf welche sich das Integral bezieht, unendlich gross, so ist es auch die Derivirte

$$f'(z) = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

und daher muss

$$(z-a)f'(z)$$

für $z = a$ von Null verschieden sein. Setzt man nun

$$z - a = re^{i\varphi},$$

so muss also

$$re^{i\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

für $r = 0$ von Null verschieden sein; demnach auch der Modul dieser Grösse, so wie dessen Quadrat. Also ist

$$r^2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) = N$$

nicht gleich Null. Führt man nun r und φ in dem obigen Integral ein, so ist das Flächenelement $= rdr\, d\varphi$, und daher das Integral gleich

$$\int\int\frac{Ndrd\varphi}{r},$$

und dieses wird unendlich für $r = 0$, weil N für $r = 0$ von Null verschieden ist.

Aus diesem Grunde kann man in diesem Falle das vorige Integral nicht benutzen. *Riemann* betrachtet statt dessen das folgende:

$$\Omega(\alpha) = \int\int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right] dxdy,$$

ausgedehnt auf die ganze Fläche T. Dieses hat den Werth Null, wenn α und β die reellen Theile einer Function $\alpha + i\beta$ der complexen Variablen $x + iy$ oder z bedeuten, denn für eine solche ist überall

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{\partial\beta}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\alpha}{\partial y} = -\frac{\partial\beta}{\partial x}. \qquad (46)$$

Aus demselben Grunde bleibt aber, wenn irgend eine reelle

Function u von x und y an Stelle von α gesetzt wird, das Integral $\Omega(u)$ endlich, sobald u nur solche Unstetigkeiten annimmt, wie der reelle Theil α einer Function $\alpha + i\beta$ von $x + iy$. Denn bedeutet μ eine reelle Function von x und y, welche nebst ihren Differentialquotienten innerhalb T endlich und stetig bleibt, und setzt man

$$u = \alpha + \mu,$$

so wird u nur so unstetig wie α; wegen der Gleichungen (46) aber ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y},$$

und daher bleiben diese Grössen auch an den Unstetigkeitsstellen endlich. Demnach ist dann das Integral $\Omega(u)$ endlich und kann seiner Natur nach nur positive Werthe annehmen. Für irgend eine Function u muss es also den kleinsten Werth erhalten. Wenn nun für u solche Functionen von der obigen Beschaffenheit gesetzt werden, welche an der Grenze gegebene Werthe annehmen, so kann wieder gezeigt werden, dass $\Omega(u)$ für diejenige unter diesen am kleinsten wird, welche der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügt. Um dies zu beweisen, verfährt man wie in § 53. Man giebt der Function u einen unendlich kleinen Zuwachs $h\sigma$, indem h eine unendlich kleine Constante, und σ eine Function von x und y bedeutet, die innerhalb T endlich und stetig bleibt und an der Begrenzung verschwindet; hierauf sucht man die Bedingung, unter welcher für jede solche Function σ und jedes positive oder negative h

$$\Omega(u + h\sigma) > \Omega(u)$$

ist. Man erhält

$$\begin{aligned}\Omega(u + h\sigma) &= \int\!\!\int\left[\left(\frac{\partial(u+h\sigma)}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial(u+h\sigma)}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2\right] dxdy \\ &= \int\!\!\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2\right] dxdy \\ &+ 2h\int\!\!\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right] dxdy \\ &+ h^2\int\!\!\int\left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)^2\right] dxdy,\end{aligned}$$

oder

$$\Omega(u+h\sigma)=\Omega(u)+2h\int\!\!\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+h^2\int\!\!\int\left[\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2\right]dxdy.$$

Hiernach ist die Bedingung dafür, dass $\Omega(u)$ ein Minimum sei:

$$\int\!\!\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right]dxdy=0; \tag{47}$$

und dann ist

$$\Omega(u+h\sigma)=\Omega(u)+h^2\int\!\!\int\left[\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2\right]dxdy. \tag{48}$$

Transformirt man die Gleichung (47) durch theilweise Integration wie in § 53, so wird

$$\int\!\!\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial x}dxdy=\int\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)dy-\int\!\!\int\sigma\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial y}\right)dxdy$$
$$\int\!\!\int\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\frac{d\sigma}{dy}dxdy=\int\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)dx-\int\!\!\int\sigma\left(\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial y}\right)dxdy,$$

und hierin ist ebenfalls dem zweiten, dx enthaltenden Linienintegrale das entgegengesetzte Zeichen zu geben, wenn es wie das erste in positiver Begrenzungsrichtung genommen werden soll. Da nun bei der Addition der vorigen Ausdrücke das Glied $\frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial y}$ sich forthebt, so geht die Gleichung (47) über in

$$\int\sigma\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)dy-\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)dx\right]-\int\!\!\int\sigma\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)dxdy=0. \tag{49}$$

Hierin verschwindet das Linienintegral, weil σ an der Grenze Null ist, und die Grössen $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}$ überall, auch an den Unstetigkeitsstellen endlich bleiben. Damit also diese Gleichung für jede Function σ erfüllt werde, muss

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$$

sein. Man schliesst nun, wie im § 53, dass das Integral $\Omega(u)$ nur ein Minimum haben, und dass es nur eine Function u geben kann, welche ihm diesen Minimalwerth ertheilt; denn wäre $u+\vartheta$ eine zweite, welche denselben Bedingungen genügt, für welche also ϑ an der Grenze Null ist, so folgt wie oben aus der Gleichung (48), wenn man darin $h\sigma$ durch ϑ ersetzt, dass das Integral

$$\int\int\left[\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

verschwinden, und hieraus, dass ϑ constant und überall gleich Null sein muss. Hiernach ist u vollständig bestimmt, sobald es an der Grenze von T gegeben ist und im Innern von T nur solche Unstetigkeiten annimmt, wie eine Function α, welche den reellen Theil einer gegebenen Function $\alpha + i\beta$ von $x + iy$ bildet.

Alsdann kann auch v bis auf eine additive Constante bestimmt werden. Denn man hat wieder

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\, dx + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy$$

oder

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy.$$

Hier können nun zwar $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ unendlich gross werden; zieht man aber von dem vorigen Ausdrucke das vollständige Differential

$$d\beta = \frac{\partial \beta}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \beta}{\partial y}\, dy$$

ab, so erhält man

$$d(v-\beta) = -\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\right) dy,$$

und dieses bleibt nach dem Früheren auch an den Unstetigkeitsstellen endlich. Man erhält also

(50) $$v = \beta + \int\left[-\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\right) dy\right] + k,$$

wo k eine willkürliche Constante bedeutet, und dann nimmt auch v nur solche Unstetigkeiten an, wie β. Die Function v ist daher ebenfalls bestimmt, sobald $w = u + iv$ nur solche Unstetigkeiten annimmt, wie $\alpha + i\beta$. Statt einer solchen Function kann auch für jede Unstetigkeitsstelle eine Function von $x + iy$ gegeben sein, welche übrigens endlich bleibt, aber an der betreffenden Unstetigkeitsstelle so unendlich wird, wie w es werden soll. Die additive Constante k endlich kann bestimmt werden, wenn der Werth von v für irgend einen Punct der Fläche T gegeben ist. Wir erhalten hiernach das Resultat: Eine Function $w = u + iv$ einer complexen Variabeln ist für eine einfach zusammenhängende Fläche T bestimmt, wenn gegeben sind: 1) die Werthe von u an der Grenze

von T, 2) der Werth von v für irgend einen Punct von T, 3) für jeden Unstetigkeitspunct eine Function von $x + iy$, welche dort ebenso unendlich wird, wie w es werden soll.

Ist die Fläche T nur durch einen Punct begrenzt, und im Unendlichen geschlossen, so reduciren sich die Bedingungen 1) und 2) wieder darauf, dass w für irgend einen Punct gegeben ist.

§ 55.

Der vorige Satz enthält zugleich einen anderen, nämlich den, dass man innerhalb einer einfach zusammenhängenden Fläche T eine complexe Function $m + in$, welche nicht zugleich eine Function von einer complexen Veränderlichen z ist, durch Hinzufügung einer ähnlichen complexen Function $\mu + i\nu$ in eine Function von z, und zwar nur auf eine Weise verwandeln kann, wenn nur $m + in$, wo es unstetig wird, dort ebenso unstetig ist, wie eine Function $\alpha + i\beta$ einer complexen Variabeln.

Denn unter dieser Bedingung bleiben die Grössen

$$\frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial x}$$

endlich, und dann ist auch das Integral

$$\Omega(m) = \int\int \left[\left(\frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial x}\right)^2\right] dxdy\,,$$

ausgedehnt auf die Fläche T, endlich. Bedeutet nun μ eine reelle Function von x und y, die nebst ihren Differentialquotienten innerhalb T endlich bleibt und an der Grenze von T Null ist, und setzt man

$$u = m + \mu,$$

so wird u nur so unstetig wie m, und also auch nur so, wie α; daher ist auch $\Omega(u)$ endlich, und setzt man alle möglichen Functionen u ein, die an der Grenze gleich m sind, so erhält $\Omega(u)$ für diejenige den kleinsten Werth, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügt. Diese kann daher den reellen Theil einer Function der complexen Variablen bilden. Man hat also μ so zu bestimmen,

dass $u = m + \mu$ dieser partiellen Differentialgleichung genügt, an der Grenze von T gleich m ist, und im Innern von T nur so unstetig wird wie α. Wir wissen, dass dies stets und nur auf eine Weise möglich ist.

Nun sind aber auch die Grössen

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial x}$$

überall endlich; setzt man daher in der Gleichung (50) n an Stelle von β, und bildet

$$v = n + \int \left[-\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y}\right) dy \right],$$

so ist iv der imaginäre Theil einer Function $u + iv$ der complexen Variablen z, da

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial n}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y}$$

und

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

ist. Setzt man also

$$\int \left[-\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y}\right) dy \right] = v \tag{51}$$

so wird

$$m + in + \mu + iv = u + iv$$

in der That eine Function von $x + iy$.

Hierauf kann nun die Bestimmung einer Function $w = u + iv$ ebenfalls gegründet werden. Die Wahl der Werthe einer Function $m + in$, die nicht zugleich Function der complexen Variablen z ist, unterliegt nämlich gar keiner Beschränkung, eben so wenig wie dies bei einer reell bleibenden Function einer reellen Variablen der Fall ist. Denkt man alle diejenigen Puncte, in denen w unstetig werden soll, mit kleinen Kreisen umgeben, und nimmt die Werthe der Function $m + in$ so an, dass sie innerhalb und auf der Peripherie der kleinen Kreise gegebenen Functionen $\alpha + i\beta$ von z gleich wird, ausserhalb aber sich überall stetig ändert und endlich bleibt, so ist der auf die kleinen Kreise bezügliche Theil des Integrals $\Omega(m)$ gleich Null, und der auf den übrigen Theil von T sich erstreckende bleibt endlich; daher kann $m + in$ durch Hinzufügung von $\mu + iv$ in eine Function w von z verwandelt werden, und da diese Verwandlung nur auf

eine Weise geschehen kann, so ist w bis auf eine additive Constante vollständig bestimmt. Diese Constante, welche in dem Integral v (51) enthalten ist, kann auch als untere Grenze desselben gedacht werden und ist bestimmt, wenn v für irgend einen Punct gegeben ist; dann aber hat das Integral v innerhalb der einfach zusammenhängenden Fläche T' einen von dem Integrationswege unabhängigen Werth.

§ 56.

Die vorigen Betrachtungen lassen sich unter einigen Modificationen auch auf den Fall anwenden, dass die Fläche T mehrfach zusammenhängend und dann durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende T' verwandelt ist. Wir beziehen hier die Grenzbedingungen auf die Begrenzung der einfach zusammenhängenden Fläche T'. Es bleibt dann alles wie vorhin, nur unterliegt die Wahl des reellen Theils u an dieser Grenze, welche aus der Begrenzung von T und den zweimal in entgegengesetzten Richtungen durchlaufenen Querschnitten besteht, gewissen Beschränkungen. Sollen nämlich in diesem Falle die Werthe der Function w zu beiden Seiten eines Querschnitts sich nur um den constanten Periodicitätsmodul unterscheiden, so müssen auch die Werthe von u zu beiden Seiten des Querschnitts nur um eine constante Grösse von einander verschieden sein. Nun aber ist der Periodicitätsmodul gleich dem Integral

$$\int dw = \int du + i \int dv,$$

ausgedehnt auf eine geschlossene Linie, welche von der einen Seite des Querschnittes auf die andere führt; also ist $\int du$ der reelle Theil des Periodicitätsmoduls. Um diese Grösse müssen die Werthe von u zu beiden Seiten des Querschnittes verschieden sein. Ist die Fläche T eine begrenzte, und sind die Werthe von u an den Begrenzungstheilen von T gegeben, so sind damit auch die reellen Theile der Periodicitätsmoduln gegeben, weil die auf diese Begrenzungstheile ausgedehnten Integrale $\int du$ entweder selbst die reellen Theile der Periodicitätsmoduln sind, oder durch lineare Gleichungen mit diesen zusammenhängen. Man kann aber auch in den Gleichungen, durch welche die Werthe von u an der Grenze von T bestimmt werden, willkürliche Constanten einführen und diese dann so bestimmen, dass die reellen Theile

der Periodicitätsmoduln gegebene Werthe erhalten. Die imaginären Theile der letzteren sind dann ebenfalls bestimmt, denn da, wie oben

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy$$

ist, so ist der imaginäre Theil des Periodicitätsmoduls für einen Querschnitt gleich dem Integrale

$$i\int\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right),$$

ausgedehnt auf eine geschlossene Linie, die von der einen Seite des Querschnitts auf die andere führt; er ist also mit u zugleich bestimmt. Ist die Fläche T unbegrenzt und durch Querschnitte in die einfach zusammenhängende T' verwandelt worden, so sind die Werthe von u an der Begrenzung von T', d. h. also hier an den Querschnitten nur der Beschränkung zu unterwerfen, dass sie an je einem Querschnitte entlang von einem Knoten des Schnittnetzes bis zum nächsten, zu beiden Seiten gleiche Aenderungen erleiden. Diese Bedingungen, welchen die Werthe von u an der Begrenzung der einfach zusammenhängenden Fläche T' genügen müssen, sind z. B. erfüllt, wenn u längs der ganzen Begrenzung den Werth Null haben soll.

§ 57.

Von den vorigen Betrachtungen hat *Riemann* eine wichtige Anwendung auf die Aufgabe gemacht, eine beliebig gegebene einfach zusammenhängende Fläche T vermittelst einer Function w durch einen Kreis S, der in der w-Fläche mit dem Radius 1 um den Nullpunct beschrieben wird, so abzubilden, dass mit Ausnahme der Verzweigungspuncte in T, das Bild dem Abgebildeten in den unendlich kleinen Theilen ähnlich ist. Diese Aufgabe kommt darauf zurück, dass eine Function w von z so bestimmt werde, dass wenn z die Begrenzung einer beliebig gegebenen einfach zusammenhängenden Fläche T durchläuft, w die Peripherie jenes Kreises S beschreibt, und dass jedem Puncte der z-Fläche nur ein Punct der w-Fläche entspreche und umgekehrt. Es soll gezeigt werden, dass es immer möglich ist, eine Function w diesen Bedingungen gemäss zu bestimmen.

Setzt man

$$w = \varrho e^{i\vartheta},$$

so müssen den Puncten z der Begrenzung von T solche Werthe von w entsprechen, für welche $\varrho = 1$ ist, Nun ist

$$\log w = \log \varrho + i\vartheta,$$

und daher an der Grenze $\log \varrho = 0$. Setzt man also

$$\log w = u + iv,$$

und bestimmt zunächst $\log w$, so muss u der Bedingung genügen, dass es an der Grenze überall den Werth Null hat. Bezeichnet man jetzt mit a den Punct z in T, welchem der Mittelpunct $w = 0$ des Kreises S entspricht, so wird also $w = 0$ für $z = a$, und wir nehmen zuerst an, dass a kein Verzweigungspunct sei. Da nun jedem Puncte z der Fläche T nur ein Punct w der Kreisfläche S entsprechen soll und umgekehrt, so wird w nur ein Mal Null für $z = a$, und daher kann man setzen (§ 34)

$$w = (z - a)\, \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z = a$ weder Null noch unendlich ist. Dann hat man

$$\log w = \log (z - a) + \log \psi(z),$$

und folglich muss $\log w$ so unstetig werden, wie $\log (z - a)$. Setzt man

$$z - a = re^{i\varphi}\quad,\quad \log (z - a) = \log r + i\varphi,$$

so besteht dies Unstetigwerden darin, dass erstens $\log r$, der reelle Theil von $\log (z - a)$, für $r = 0$ oder $z = a$ negativ unendlich wird, und zweitens, dass $i\varphi$, der imaginäre Theil von $\log (z - a)$, beim Ueberschreiten (von der Rechten zur Linken) einer beliebigen in T von a aus gezogenen Linie l plötzlich einen um $- 2\pi i$ grösseren Werth annimmt. Denselben Unstetigkeiten muss also auch $\log w = u + iv$ unterliegen, d. h. u muss für $z = a$ oder $w = 0$ negativ unendlich werden, und v beim Ueberschreiten desjenigen Radius in S, welcher der Linie l in T entspricht, sich plötzlich um 2π ändern, und zwar um 2π kleiner werden, wenn der vom Mittelpuncte aus gesehene Radius von der Rechten zur Linken überschritten wird. Man beschreibe nun in T um den Punct a einen beliebig kleinen Kreis Θ und wähle die Werthe einer Function $m + in$ von x und y so, dass diese innerhalb und auf der Peripherie des Kreises Θ gleich $\log (z - a)$ sei, ferner beim Ueberschreiten der Linie l sich plötzlich um $2\pi i$ ändere, sonst aber innerhalb T überall endlich und stetig sei, sodann dass m auf der Grenze von T den Werth Null habe. Dann ist das Integral

$$\int\int\left[\left(\frac{\partial m}{\partial x}-\frac{\partial n}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial m}{\partial y}+\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2\right]dxdy,$$

ausgedehnt auf den kleinen Kreis Θ, gleich Null, weil hier $m+in$ Function von z ist, und auf den übrigen Theil von T erstreckt, endlich; und daher kann $m+in$ in eine Function $u+iv$ von z verwandelt werden. Der reelle Theil $u=m+\mu$ ist dabei so zu bestimmen, dass er der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ genügt, an der Grenze von T den Werth Null bekommt und für $z=a$ negativ unendlich wird, wie der reelle Theil von $\log(z-a)$. Dadurch ist er vollständig bestimmt. Der imaginäre Theil iv ist sodann durch

$$v=n+\int\left[-\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial n}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial n}{\partial y}\right)dy\right]+k$$

gegeben, worin k eine willkürliche Constante bedeutet. Darin bleibt das Integral überall endlich und stetig, und daher wird v nur so unstetig, wie n, d. h. es ändert sich plötzlich um 2π, wenn n eine solche Aenderung erleidet.

Ist auf diese Weise $\log w=u+iv$ bestimmt, so erhält man

$$w=e^{u+iv}=e^{u}(\cos v+i\sin v).$$

In der That ist jetzt an der Grenze $u=0$, also $e^u=1$, für $z=a$ aber $u=-\infty$, also $e^u=0$. Die Unstetigkeiten von v werden einflusslos, und daher ändert sich w stetig innerhalb eines Gebiets von Werthen, deren Modul $\leqq 1$ ist. Da nun e^u und v die Polar-Coordinaten des Punctes w sind, so entspricht der Begrenzung von T die Peripherie eines Kreises S, der mit einem Radius $=1$ um den Punct $w=0$ beschrieben ist. Dieser Kreis, sowie jeder andere, der einem constanten Werthe von u angehört, wird nur einmal durchlaufen; denn beim Ueberschreiten des Radius, welcher der Linie l entspricht, wird v plötzlich um 2π kleiner, daher nimmt v nur die Werthe zwischen 0 und 2π an, und zwar jeden auch nur einmal, da sonst v irgendwo einen Maximal- oder Minimalwerth erreichen müsste, was nach § 24 nicht möglich ist. Ueber die in v enthaltene willkürliche Constante k kann man so verfügen, dass ein bestimmter Punct der Peripherie des Kreises S einem bestimmten Puncte der Begrenzung von T entspricht. Der Punct a, welchem der Mittelpunct des Kreises S entsprechen soll, kann ebenfalls beliebig, und daher auch immer so gewählt werden, dass er auf keinen Verzwei-

gungspunct der Fläche T fällt. Wollte man aber einen solchen dazu nehmen, um welchen die Fläche T sich h Mal windet, so würde man, indem man $(z-a)^{\frac{1}{h}} = \zeta$ setzt, w als Function von ζ betrachten und den Mittelpunct des Kreises S dem Puncte $\zeta=0$ entsprechen lassen. Dann würde also log w so unstetig werden müssen, wie $\frac{1}{h} \log (z-a)$.

Da die Werthe von u an der Begrenzung der einfach zusammenhängenden Fläche gleich Null sein müssen, so kann diese auch durch Ziehen von Querschnitten aus einer mehrfach zusammenhängenden entstanden sein, und auch dann kann die Function w so bestimmt werden, dass der Begrenzung dieser Fläche T' ein einfacher Kreis S entspricht.

Zwölfter Abschnitt.

Ueber die Bestimmung des Zusammenhangs einer gegebenen Fläche.

---

§ 58.

Wir machen von dem vorigen Satze nun noch einige Anwendungen und beschäftigen uns zuerst mit der Aufgabe, die Anzahl der einfachen Verzweigungspuncte zu finden, welche in einer ihrer Begrenzung nach gegebenen einfach zusammenhängenden Fläche liegen. Dabei machen wir Gebrauch von der § 13 erwähnten Auffassungsweise, nach welcher man einen Windungspunct $(m-1)$ter Ordnung betrachten kann als entstanden durch das Zusammenfallen von $m-1$ einfachen Verzweigungspuncten. Wenn daher die in einer gegebenen Fläche enthaltenen Windungspuncte resp. von den Ordnungen $m'-1$, $m''-1$, $m'''-1$, etc. sind, so bedeutet jener Auffassung gemäss $\Sigma(m-1)$ die Anzahl der in der Fläche enthaltenen einfachen Verzweigungspuncte.

Wir bezeichnen die gegebene einfach zusammenhängende

Fläche der z mit T und nehmen dieselbe zuerst von endlicher Ausdehnung an, sodass z nicht unendlich gross wird. Nach dem Satze des vorigen § denken wir uns diese Fläche mittelst einer Function w durch eine Kreisfläche, die mit S bezeichnet werden möge, abgebildet. Dann wird w ebenfalls nicht unendlich gross, und da diese Fläche der w eine einfache aus einem Blatte bestehende Kreisfläche ist, so hat z, als Function von w betrachtet, keine Verzweigungspuncte. Da nun weder z noch w unendlich gross ist, so bleibt $\frac{dw}{dz}$ und also auch $\frac{dz}{dw}$ für alle Puncte z, die keine Verzweigungspuncte sind, endlich und von Null verschieden (§ 39). Ist ferner $z = b$ ein Windungspunct $(m-1)$ter Ordnung, und $w = w_b$ der ihm entsprechende Punct der w-Fläche, so ist (nach dem Satze (27) § 39) $\frac{dw}{dz}$ unendlich gross, und zwar so, dass

$$\lim\,(w - w_b)^{m-1}\frac{dw}{dz}$$

endlich und von Null verschieden ist. Setzt man

$$(w - w_b)^{m-1}\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\psi(w)}$$

so bedeutet $\psi(w)$ eine Function, welche für $w = w_b$ weder Null noch unendlich gross ist. Hieraus folgt

(52) $$\frac{dz}{dw} = (w - w_b)^{m-1}\psi(w),$$

und daher ist $\frac{dz}{dw}$, als Function von w betrachtet, für $w = w_b$ von der $(m-1)$ten Ordnung unendlich klein (§ 34). Demnach kann man auch sagen, $\frac{dz}{dw}$ wird für einen Punct $z = b$, in welchem $(m-1)$ einfache Verzweigungspuncte vereinigt sind, $m-1$ Mal Null. In allen übrigen Puncten verschwindet $\frac{dz}{dw}$ nicht, und daher ist die Anzahl der einfachen Verzweigungspuncte in T gleich der Anzahl der Wurzeln der Gleichung

$$\frac{dz}{dw} = 0.$$

Nun erstreckt die Fläche T sich nicht ins Unendliche, daher wird z nicht unendlich gross, und folglich wird, da die w-Fläche keine Verzweigungspuncte besitzt, auch $\frac{dz}{dw}$ innerhalb T nicht unendlich gross. Da ferner aus demselben Grunde z eine einwer-

thige Function von w ist, so können wir den Satz (22) des § 35 anwenden und die Anzahl der Puncte, in welchen $\frac{dz}{dw}$ verschwindet, durch ein bestimmtes Integral ausdrücken. Bezeichnet nämlich g diese Anzahl, also auch die Anzahl der einfachen Verzweigungspuncte, welche innerhalb T liegen, so ist nach jenem Satze

$$\int d \log \frac{dz}{dw} = 2\pi i g, \tag{53}$$

das Integral in positiver Richtung auf die Begrenzung von T oder von S ausgedehnt, je nachdem man z oder w als unabhängige Variable ansieht. Dies Resultat folgt auch aus der Gleichung (52), wenn man auf diese das Verfahren des § 35 anwendet und berücksichtigt, dass $\frac{dz}{dw}$ innerhalb T endlich bleibt und nur in den Verzweigungspuncten verschwindet.

Nun kann aber das obige Integral auch durch die Anzahl der Umläufe ausgedrückt werden, welche die Begrenzung von T macht, welche Begrenzung, da T einfach zusammenhängend ist, aus einem ununterbrochenen Zuge besteht (§ 48). Nimmt man nämlich auf den Begrenzungen von T und S zwei feste einander entsprechende Puncte z_0 und w_0 beliebig an und bezeichnet mit s die Länge der Begrenzungslinie von T, von dem festen Puncte z_0 an bis zu einem variablen Puncte z dieser Begrenzung genommen, ebenso mit σ die Länge des entsprechenden Kreisbogens der Begrenzung von S, so hängt die Lage eines Puncts z der Begrenzung von T von der Länge s, diese von der Länge des Kreisbogens σ, und diese endlich von der Lage des entsprechenden Punctes w auf der Peripherie des Kreises S ab. Mit anderen Worten: z kann als Function von s, s als Function von σ, und σ als Function von w betrachtet werden. Demnach kann man setzen

$$\frac{dz}{dw} = \frac{dz}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dw} \tag{54}$$

oder

$$\frac{dz}{dw} = \frac{\frac{dz}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma}}{\frac{dw}{d\sigma}};$$

folglich ist

$$\log \frac{dz}{dw} = \log \frac{dz}{ds} + \log \frac{ds}{d\sigma} - \log \frac{dw}{d\sigma}$$

und

(55) $$\int d\log\frac{dz}{dw}=\int d\log\frac{dz}{ds}+\int d\log\frac{ds}{d\sigma}-\int d\log\frac{dw}{d\sigma},$$

alle diese Integrale auf die Begrenzung von T oder von S ausgedehnt. Nun ist, um mit dem letzten Integrale anzufangen, $d\sigma$ die Länge des unendlich kleinen Kreisbogens, welcher in Beziehung auf Länge und Richtung zugleich durch dw dargestellt wird, d. h. $d\sigma$ ist der Modul der complexen Grösse dw; setzt man also

$$dw = d\sigma \,.\, e^{i\varphi},$$

so bedeutet φ den Winkel, welchen das Bogenelement $d\sigma$ an irgend einer Stelle mit der Hauptaxe bildet. Nun folgt

$$\int d\log\frac{dw}{d\sigma} = i\int d\varphi,$$

und darin bedeutet $\int d\varphi$ die ganze Zunahme, welche der Winkel φ erfährt, während der Punct w die Peripherie des Kreises von w_0 an bis wieder zu diesem Puncte zurück durchläuft. Diese Zunahme beträgt 2π, und daher ist

$$\int d\log\frac{dw}{d\sigma} = 2\pi i.$$

Dieselbe Betrachtung findet Anwendung auf das erste Integral in (55). Bei diesem ist ds der Modul von dz. Man kann daher setzen

$$dz = ds \,.\, e^{i\varphi}$$

$$\int d\log\frac{dz}{ds} = i\int d\varphi,$$

und dann bedeutet φ den Winkel, welchen das Bogenelement ds mit der Hauptaxe bildet, und $\int d\varphi$ die ganze Zunahme, die dieser Winkel erfährt, während z von dem Puncte z_0 anfangend die ganze Begrenzung von T durchläuft. Da die letztere eine geschlossene Linie ist, die einen ununterbrochenen Zug bildet, so muss sie eine gewisse Anzahl von Umläufen entweder in der Richtung der wachsenden Winkel oder in der entgegengesetzten Richtung machen; jeder Umlauf in der ersteren Richtung vergrössert den Winkel φ um 2π, jeder Umlauf in der entgegengesetzten Richtung verkleinert ihn um ebenso viel. Bezeichnet man daher mit U die positive oder negative ganze Zahl, welche entsteht, wenn man die Anzahl der Umläufe in der Richtung der abnehmenden Winkel subtrahirt von der Anzahl der Umläufe in der Richtung der wachsenden Winkel, so ist

$$\int d\varphi = 2\pi\, U$$

und daher

$$\int d \log \frac{dz}{ds} = 2\pi i\, U. \tag{56}$$

Die Umläufe sind dabei stets in positiver Begrenzungsrichtung auszuführen. Wir wollen diese positive oder negative Zahl U der Kürze wegen die Anzahl der positiven Umläufe nennen.

Was endlich das zweite Integral der Gleichung (55), nämlich

$$\int d \log \frac{ds}{d\sigma}$$

anbetrifft, so kann leicht gezeigt werden, dass es verschwindet. Die Grössen ds und $d\sigma$ sind nämlich reell, folglich ist auch $\frac{ds}{d\sigma}$ reell, und zwar ist diese Grösse der Modul von $\frac{dz}{dw}$, wie aus der Gleichung (54) leicht hervorgeht; demnach bildet $\log \frac{ds}{d\sigma}$ den reellen Theil von $\log \frac{dz}{dw}$. Nun erhält $\log \frac{ds}{d\sigma}$ am Ende des Umlaufs denselben Werth wie am Anfange, und da diese Grösse ausserdem während des Umlaufs nicht unendlich gross werden kann, so ist

$$\int d \log \frac{ds}{d\sigma} = 0.$$

Setzt man nun die gefundenen Werthe für die drei Integrale in (55) ein, so erhält man

$$\int d \log \frac{dz}{dw} = 2\pi i\, (U - 1)$$

und dann durch Vergleichung mit (53)

$$g = U - 1.$$

Demnach ergibt sich der Satz, den wir für einen speciellen Fall schon in § 13 bestätigt fanden: Die Anzahl der einfachen Verzweigungspuncte, welche innerhalb einer endlich begrenzten und einfach zusammenhängenden Fläche T liegen, ist um Eins kleiner als die Anzahl der positiven Umläufe, welche die Begrenzung von T macht. Dabei ist diese Anzahl der positiven Umläufe in dem Sinne zu nehmen, wie es oben angegeben wurde.

§ 59.

Der Begrenzung von T war im Vorigen weiter keine Beschränkung auferlegt worden als die, dass die von ihr begrenzte Fläche einfach zusammenhängend sei und sich nicht ins Unendliche erstrecke. Wir können daher die gefundenen Resultate sogleich auf eine endliche Fläche T' anwenden, die durch Hinzufügung von Querschnitten aus einer mehrfach zusammenhängenden Fläche T entstanden und einfach zusammenhängend geworden ist. Diese Verwandlung lässt die Verzweigungspuncte ungeändert. Die Begrenzung von T' besteht dann aus der Begrenzung von T und den doppelt durchlaufenen Querschnitten. Wir bezeichnen die Anzahl der letzteren durch q. Bedeutet nun U' die Anzahl der positiven Umläufe, welche die Begrenzung von T' macht, so ist

$$U' = g + 1.$$

Nach Gleichung (56) aber ist auch

$$\int d \log \frac{dz}{ds} = 2\pi i U',$$

also haben wir, wenn dies Integral jetzt auf die Begrenzung von T' ausgedehnt wird,

(57) $$\int d \log \frac{dz}{ds} = 2\pi i (g + 1).$$

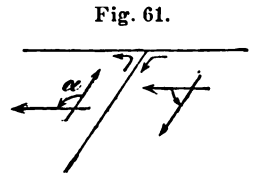
Nun kann man dies Integral auch durch die Anzahl q der Querschnitte und die Anzahl der positiven Umläufe U, welche die Begrenzung von T macht, ausdrücken. Da es nämlich auch gleich

$$i \int d\varphi$$

ist, so haben wir nur zuzusehn, um wie viel der Winkel φ, den das Bogenelement ds mit der Hauptaxe macht, im Ganzen zunimmt, während die Begrenzung von T', d. h. also die Begrenzung von T und die Querschnitte, die letzteren doppelt, durchlaufen werden. Da die Begrenzung von T U positive Umläufe macht, so lässt diese den Winkel φ um $2\pi U$ zunehmen. Betrachten wir nun die Querschnitte. An jedem Endpuncte eines Querschnitts, gleichviel ob derselbe in einen Begrenzungstheil von T oder in einen anderen Querschnitt mündet, erfährt die Begrenzungsrichtung von T' eine plötzliche Aenderung. Sei α der Winkel, um welchen sich die Richtung ändere (Fig. 61). (Es

kann allerdings auch der Fall eintreten, dass der Querschnitt ohne plötzliche Richtungsänderung in einen anderen Begrenzungstheil übergeht; dieser Fall ordnet sich aber dem Vorigen unter, indem dann $\alpha = 0$ anzunehmen ist.) Der Winkel φ nimmt also an dieser Stelle plötzlich um α zu. Beim Durchlaufen der Begrenzung von T' kommt man nun aber, da die Querschnitte zwei Mal durchlaufen werden müssen, noch einmal an diese Stelle zurück, und zwar wird dann der Querschnitt in entgegengesetzter, der anstossende Begrenzungstheil aber in der nämlichen Richtung durchlaufen. Daraus folgt, dass die Begrenzungsrichtung jetzt eine plötzliche Aenderung erfährt, die gleich dem Winkel $\pi - \alpha$ ist. Demnach nimmt φ auf's Neue um $\pi - \alpha$ zu. An jedem Endpuncte eines Querschnitts erfährt also φ einen Zuwachs gleich $\alpha + \pi - \alpha$ oder gleich π. Bei jedem Querschnitte kommen aber beide Endpuncte in Betracht, auch dann, wenn der Querschnitt eine geschlossene Linie ist, weil auch in diesem Falle Anfangs- und Endpunct als auf verschiedenen Seiten der anstossenden Begrenzungslinie liegend zu betrachten sind; daher giebt jeder Querschnitt dem Winkel φ einen Zuwachs $= 2\pi$. Ist nun die Anzahl der Querschnitte gleich q, die Anzahl der positiven Umläufe, welche die Begrenzung von T' macht, gleich U, so wird

Fig. 61.



$$\int d\varphi = 2\pi\,(U + q).$$

und daher das auf die Begrenzung von T' erstreckte Integral

$$\int d \log \frac{dz}{ds} = 2\pi i\,(U + q).$$

Dies Resultat, mit der Gleichung (57) verglichen, ergiebt die Beziehung

$$g + 1 = U + q$$

zwischen der Anzahl der positiven Umläufe, U, welche die Begrenzung einer beliebigen endlichen Fläche T macht, der Anzahl der Querschnitte, q, welche T in eine einfach zusammenhängende verwandeln und der Anzahl der einfachen Verzweigungspuncte, g, die innerhalb T liegen.

Besteht die Fläche T z. B. aus einem Blatte, so ist $g = 0$; wird sie ferner begrenzt von einer äusseren Linie und n kleinen

Kreisen, die von der ersteren umschlossen werden, so macht bei positiver Begrenzungsrichtung jene einen Umlauf in der Richtung der wachsenden Winkel, jeder der kleinen Kreise einen Umlauf in entgegengesetzter Richtung, folglich ist

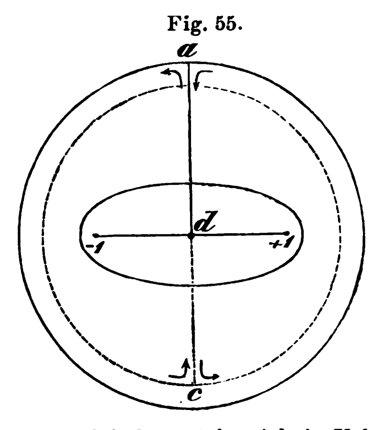
$$U = 1 - n,$$

und man erhält

$$1 = 1 - n + q \quad \text{oder} \quad q = n;$$

die Anzahl der Querschnitte ist gleich der Anzahl der inneren Kreise.

Fig. 55.



Wählen wir ferner zur Vergleichung die in § 52. 3) benutzte und durch Fig. 55 dargestellte Fläche, welche aus zwei Blättern besteht, zwei Verzweigungspuncte hat, und in jedem Blatte durch eine geschlossene Linie begrenzt ist, so muss jede der letzteren bei positiver Begrenzungsrichtung in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen werden, daher ist $U = 2$; ausserdem ist $g = 2$, und folglich ergiebt sich in Uebereinstimmung mit dem Früheren

$$2 + 1 = 2 + q \quad \text{oder} \quad q = 1.$$

Durch die vorige Beziehung, welche auch

$$q = g - U + 1$$

geschrieben werden kann, ist also der Zusammenhang einer Fläche bekannt, so bald die Anzahl ihrer einfachen Verzweigungspuncte und die Anzahl der positiven Umläufe ihrer Begrenzung gegeben ist.

§ 60.

Wir wenden uns jetzt zu der Betrachtung einer Fläche T, die sich ins Unendliche erstreckt, und nehmen sie dann als geschlossene Fläche an. Hier fällt die Begrenzung fort; statt dessen wollen wir annehmen, dass die Anzahl der Blätter, aus denen die Fläche besteht, bekannt sei, und diese Anzahl mit n bezeichnen. Denken wir nun wieder diese Fläche durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende T' zerschnitten, so gilt in

diesem Falle die Gleichung (53) § 58 nicht mehr, denn da jetzt z und also auch $\frac{dz}{dw}$ unendlich gross wird, so ist das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int d\log\frac{dz}{dw}$ bezogen auf die Begrenzung von T' nach dem Satze (21) § 35 gleich der Differenz aus der Anzahl der Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dw} = 0$ und der Anzahl der Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dw} = \infty$. Da nun die w-Fläche ein einfacher Kreis ist, so bleibt w für alle Werthe von z endlich, und z hat als Function von w betrachtet keine Verzweigungspuncte. Daher ist $\frac{dz}{dw}$ für alle endlichen Werthe von z, die keine Verzweigungspuncte sind, weder Null noch Unendlich und wird für $z = \infty$ unendlich gross. In den endlichen Verzweigungspuncten ist $\frac{dz}{dw} = 0$ und zwar in jedem so viele Male, als einfache Verzweigungspuncte in ihm vereinigt sind. Ist daher keiner der unendlich entfernten Puncte der z-Fläche zugleich Verzweigungspunct, so ist wieder die Anzahl der Verzweigungspuncte gleich der Anzahl der Wurzeln von $\frac{dz}{dw} = 0$, und diese möge wie oben mit g bezeichnet werden. Die Variable z wird in jedem der n Blätter der z-Fläche unendlich gross, also n Mal. Aber da, wo z von der ersten Ordnung unendlich gross ist, wird (nach § 29) $\frac{dz}{dw}$ von der zweiten Ordnung unendlich gross, wenn wie hier das entsprechende w endlich ist, daher wird $\frac{dz}{dw}$ in $2n$ Puncten unendlich gross von der ersten Ordnung. Die Anzahl der Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dw} = \infty$ ist also $2n$, die der Gleichung $\frac{dz}{dw} = 0$ war g, also hat man (nach (21) § 35)

$$\int d\log\frac{dz}{dw} = 2\pi i\,(g - 2n).$$

Wenn dagegen der Punct $z = \infty$ als Verzweigungspunct auftritt, und m Blätter in ihm zusammenhängen, so ist an dieser Stelle $\frac{dz}{dw}$ (nach dem Satze (31) § 39, indem man $\mu = 1$ zu setzen hat) $(m + 1)$ Mal unendlich gross. Ausserdem kommt der Punct $z = \infty$ noch in $n - m$ nicht zusammenhängenden Blät-

tern vor, und in diesen wird $\frac{dz}{dw}$ daher $(2n - 2m)$ Mal unendlich gross. Demnach ist im Ganzen die Anzahl der Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dw} = \infty$ gleich $m + 1 + 2n - 2m$ oder gleich $2n - m + 1$. Bedeutet g wieder die Anzahl der Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dw} = 0$, so ist jetzt

$$\int d \log \frac{dz}{dw} = 2\pi i \, (g - 2n + m - 1).$$

Nun ist g nur die Anzahl der endlichen Verzweigungspuncte; zu diesen kommen noch $m - 1$ einfache Verzweigungspuncte hinzu, welche in dem Puncte $z = \infty$ vereinigt sind. Bezeichnet also g' die Anzahl aller einfachen Verzweigungspuncte, so ist

$$g' = g + m - 1$$

und daher wieder

$$\int d \log \frac{dz}{dw} = 2\pi i \, (g' - 2n).$$

Ganz dasselbe Resultat ergiebt sich, wenn mehrere der unendlich entfernten Puncte als Verzweigungspuncte auftreten. Demnach ist in allen Fällen, wenn g die Anzahl aller einfachen Verzweigungspuncte, und n die Anzahl der Blätter der z-Fläche bedeutet,

(58) $$\int d \log \frac{dz}{dw} = 2\pi i \, (g - 2n).$$

Nun kann man dies Integral in ähnlicher Weise wie in § 58 behandeln. Auf die Begrenzung von T' oder von S ausgedehnt hat man, wenn die nämlichen Bezeichnungen wie dort angewendet werden, nach (55)

(59) $$\int d \log \frac{dz}{dw} = \int d \log \frac{dz}{ds} + \int d \log \frac{ds}{d\sigma} - \int d \log \frac{dw}{d\sigma},$$

und darin ist wieder

$$\int d \log \frac{ds}{d\sigma} = 0 \quad , \quad \int d \log \frac{dw}{d\sigma} = 2\pi i,$$

das erste Integral aber erhält einen andern Werth. Da nämlich die Fläche T im Unendlichen geschlossen ist, so ist der erste Querschnitt jedenfalls eine geschlossene Linie, von dieser geht der zweite aus. Wenn man nun wieder

$$\int d \log \frac{dz}{ds} = i \int d\varphi$$

setzt, so erhält, wie im vorigen § der Winkel φ an jeder Stelle, wo ein Querschnitt in einen früheren einmündet, den Zuwachs π, und da dies sowohl beim Anfangs- wie beim Endpuncte des Querschnittes stattfindet, so liefert jeder Querschnitt den Zuwachs 2π. Davon macht aber der erste Querschnitt eine Ausnahme, weil dieser nicht in eine frühere Begrenzungslinie einmündet, sondern im Begrenzungspuncte anfängt und endigt. Ist daher q die Anzahl der Querschnitte, so ist die Zunahme, welche φ beim Umlaufe um die Begrenzung von T' an den Stellen erfährt, wo die Querschnitte an einander anstossen, gleich

$$2\pi(q-1);$$

die Umläufe um die Querschnitte selbst dagegen heben sich alle auf, da jeder Querschnitt zwei Mal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird. Demnach ist

$$\int d \log \frac{dz}{ds} = 2\pi i (q-1).$$

Die Gleichung (59) liefert also

$$\int d \log \frac{dz}{dw} = 2\pi i (q-2),$$

und durch Vergleichung mit (58) erhält man

$$g - 2n = q - 2 \text{ oder } q = g - 2(n-1),$$

und diese Gleichung giebt an, wieviel Querschnitte erforderlich sind, um eine geschlossene Fläche, die aus n Blättern besteht und g Verzweigungspuncte besitzt, in eine einfach zusammenhängende zu verwandeln.

Besteht z. B. die Fläche nur aus 2 Blättern, d. h. ist $n=2$, so folgt

$$q = g - 2,$$

dann ist also die Anzahl der Querschnitte immer um 2 kleiner als die Anzahl der Verzweigungspuncte, was in früheren Beispielen (§ 48) seine Bestätigung findet. Sind nur zwei Verzweigungspuncte vorhanden, ist also $g=2$, so wird $q=0$, d. h. die Fläche ist einfach zusammenhängend (§ 46. 2)). Ein negativ Werden von q würde darauf hindeuten, dass die Fläche nicht mehr zusammenhängt, sondern aus getrennten Theilen besteht. Eine zusammenhängende Fläche mit zwei Blättern muss daher mindestens

zwei Verzweigungspuncte haben. Im Allgemeinen muss eine aus n Blättern bestehende Fläche, wenn sie zusammenhängend sein soll, mindestens $2(n-1)$ einfache Verzweigungspuncte besitzen, und wenn sie gerade so viele hat, so ist sie einfach zusammenhängend. Der einfachste Fall hierfür wäre der, dass 2 Windungspuncte $(n-1)$ter Ordnung vorhanden sind.

Berichtigungen.

S. 4. Z. 7. lies „bei" statt „dei"

S. 45. „ 5. lies „um den Nullpunct" statt „aus dem Nullpuncte".

S. 73. „ 2. v. u. in den Grenzen der Integrale lies x_h und x_k statt x^h und x^k.

S. 103. „ 7. in der oberen Grenze des ersten Integrals lies 2π statt 2.

S. 135. „ 6. v. u. lies „so ist" statt „iso st".

S. 167. „ 11. lies „ununterbrochenen" statt „ununterbrochenem".

S. 180. „ 9. lies „von Vielfachen des Periodicitätsmoduls" statt „von den Periodicitätsmoduln".

S. 184. „ 9. v. u. in den Grenzen der Integrale lies $+1$ und -1 statt $+$ und $-$.

S. 185. „ 14. v. u. lies $w_a - 2\pi$ statt $w_{a-2\pi}$.

S. 205. „ 5. v. u. lies „zusammenhängenden" st. „zusamenhängenden".



